Iran
Micro

فروشگاه قطعات الکترونیک ایران میکرو

- قطعات الکترونیک
- مجموعه های نرم افزاری
- تجهیزات تست و اندازه گیری
- ابزار آلات و تجهیزات آزمایشگاهی
- انواع سنسور و ماژول های کاربردی
- انواع ریموت کنترل و گیرنده های رادیویی

www.Iran-Micro.com
021-55489505-7

قیمت مناسب - پرداخت آنلاین - تنوع در محصولات
ارسال به تمام نقاط ایران - دارای مجوز از وزارت صنعت ، معدن و تجارت

Iran Micro

انجمن برق و الکترونیک
مجلات معتبر برق و الکترونیک
دانلود دیتاشیت قطعات پرکاربرد
مقالات و کنفرانس های IEEE
دانلود مقالات برق و الکترونیک
نرم افزار های کاربردی برق و الکترونیک
پروژه های الکترونیکی آماده به همراه منابع
انواع کتاب های زبان اصلی و جزوات درسی
منابع کنکور کاردانی به کارشناسی و کارشناسی ارشد

WWW.IRAN-MICRO.COM
FORUM.IRAN-MICRO.COM
DOC.IRAN-MICRO.COM

بسم الله الرحمن الرحیم

نمونه سوالات معادلات دیفرانسیل

دانشگاه آزاد اسلامی – واحد تهران جنوب

(دانشکدهٔ فنی)

تهیه کننده :

حامد مظاهری

شما هم میتوانید مقالات خود را به ما ارسال کنید تا با نام شما در سایت قرار داده شود

Hamed.Mazaheri@Gmail.com

www.ir-micro.com

مرجع فارسی

میکروکنترلرهای PIC

نمونه سؤالات درس

معادلات دیفرانسیل

همراه با پاسخ تشریحی

www.Ir-Micro.com

وب سایت جامع الکترونیک ، برق و کامپیوتر

ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

پاسخ در صفحه ۸

۱- معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید.

الف) $y' = e^{y} + 2xy'$

ب) $y = \sec x$ ، $y' = 2\tan x \sec x - y^{2}\sin x$

۲- معادله مسیرهای قائم بر منحنی‌های $y = c(\sec x + \tan x)$ را بیابید.

۳- با فرض این که $y_1 = \sin(e^{x})$ یک جواب خصوصی معادله همگن زیر باشد، جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0$$

۴- الف) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را به روش ضرایب نامعین تعیین کنید:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = xe^{x}$$

ب) جواب عمومی معادله $xy'' = y'\ln(\frac{y'}{x})$ را به دست آورید.

۵- با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب معادله‌های داده شده را بیابید.

الف)

$$y(x) = e^{x}\left[1 + \int_0^x e^{-t}y(t)dt\right]$$

ب)

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^{2}+s+1}e^{-\pi s}\right]$$

۶- از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر فقط x را بیابید.

$$\begin{cases} x'' - x + 5y' = \begin{cases} 6t & 0 \le t < 2 \\ 12 & t \ge 2 \end{cases} \\ y'' - 4y - 2x' = 0 \end{cases} \qquad x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

شهریورماه ۱۳۸۳

پاسخ در صفحه ۱۱

۱- با تعیین عامل انتگرال‌ساز مناسب، معادله زیر را حل کنید.

$$(x-(\sec y)\ln x)y'+\tan y-\frac{y}{x}\sec y=0$$

۲- با فرض این که $y=\ln x$ یک جواب معادله زیر باشد، جواب عمومی معادله‌ی زیر را به‌دست آورید.

$$y'=x(\ln x)^2-2xy\ln x+\frac{1}{x}+xy^2$$

۳- با فرض آن که $y_1=\sin(e^x)$ یک جواب خصوصی معادله همگن $y''-y'+e^{2x}y=0$ باشد. جواب عمومی معادله غیرهمگن $y''-y'+e^{2x}y=e^{2x}$ را به دست آورید.

۴- جواب عمومی معادله زیر را به روش اپراتورها به دست آورید.

$$y''+y=3x^4$$

۵- الف) جواب عمومی معادله‌ی $x^2y''+xy'-y=4$ را به دست آورید.

ب) فقط فرم جواب خصوصی معادله‌ی $y'''-y''+y'=xe^{2x}+x+3$ را به روش ضرایب نامعین به دست آورید.

ج) فقط جواب خصوصی معادله‌ی $y''+3y'+3y=\sinh x$ را به روش اپراتورها به دست آورید.

۶- مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال:

$$\int_a^{\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \qquad (a>0,\ b>0)$$

۷- با فرض $L(y)=F(S)$ مطلوبست محاسبه:

$$L\left[xy''(x)+\int_0^x e^{3u}\cos 2u\,du\right]\ ,\quad y(0)=3\ ,\quad y'(0)=0$$

ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

پاسخ در صفحه ۱۶

۱- جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید.

الف) $(xy'-y)\cos(\frac{2y}{x}) = -3x^2$

ب) $dx + (\frac{x}{y} - \sin y)dy = 0$ (به کمک عامل انتگرال‌ساز)

۲- به روش اپراتور معکوس جواب عمومی معادله‌ی $x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{1}{x^2}$ را بیابید.

۳- هرگاه $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ یک جواب خصوصی معادله‌ی $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ باشد، جواب عمومی معادله‌ی $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{\frac{3}{2}}$ را به‌دست آورید.

۴- معادله زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$y'' + 4y' + 4y = u_1(t) + u_2(t) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

۵- الف) اگر $f(x) = \begin{cases} x & x < \frac{\pi}{2} \\ \sin 3x & \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \\ \cos x & x > 2\pi \end{cases}$، آنگاه $L(f(x))$ را به‌دست آورید.

ب) مطلوبست محاسبه $L^{-1}(F(s))$، به طوری که داریم:

$$F(s) = \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+5s}\right)$$

۶- دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} x'' + x' + y = 0 \\ y' + \int_0^t x(u)du + x = 0 \end{cases} \qquad x(0) = 0\ ,\ x'(0) = 1\ ,\ y(0) = 1$$

ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

پاسخ در صفحه ۲۱

۱- جواب عمومی معادلات زیر را به‌دست آورید.

الف) $xy' = y + x\sin(\frac{y-x}{x})$

ب) $P = \tan(x - \frac{P}{1+P^2})\ ,\ y' = P$

ج) $(1 + \frac{x^3}{y}\sin^2 x)dx + \frac{1}{y}(x + \frac{1}{\cos^2(2y)})dy = 0$

۲- معادله‌ی مسیرهای قائم بر منحنی‌های $y = C(\sec x + \tan x)$ را بیابید.

۳- جواب عمومی معادله‌ی $xy'' + y' = (y')^2$ را به‌دست آورید.

۴- الف) از تابع داده شده لاپلاس بگیرید.

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ t & t > 2\pi \end{cases}$$

ب) از تابع داده شده لاپلاس معکوس بگیرید.

$$F(s) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{s}{s^2+1}}\right)$$

۵- دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'(t) + \int_0^t y(u)du = u_1(t) \\ y'(t) + \int_0^t x(u)du = u_2(t) \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0$$

۶- معادله‌ی انتگرالی زیر را حل کنید.

$$\phi(x) + \int_0^t (x-t)\phi(t)dt = \sin 2x$$

شهریورماه ۱۳۸۲

پاسخ در صفحه ۲۵

۱- با تعیین عامل انتگرال‌ساز مناسب، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$$

۲- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

الف) $4x^2yy' - 3x(3y^2+2) + (3y^2+2)^3 = 0$

ب) $y' = y^2 + (1-2x)y + x^2 - x + 1$

۳- معادلات مرتبه دوم زیر را حل کنید.

الف) $x^2y'' - xy' = 2x^3 \ln x$

ب) $-2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$

۴- معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به روش تغییر پارامتر حل کنید.

$$y'' + 9y = 3\sec^2(3x)$$

۵- لاپلاس معکوس زیر را محاسبه کنید.

$$L^{-1}\left[\ln\frac{s^2+1}{s-1} + \operatorname{arccot}(s-5)\right]$$

۶- معادله‌ی انتگرالی زیر را حل کنید.

$$y''(t) + y'(t) = \cos t + \int_0^t \sin(t-u)y'(u)du \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

پاسخ در صفحه ۳۰

۱- ابتدا یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله‌ی دیفرانسیل $(2y+3xy^2)dx+(x+2x^2y)dy=0$ به دست آورده و سپس معادله‌ی دیفرانسیل را حل کنید.

۲- با تعویض متغیر مناسب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به یک معادله‌ی دیفرانسیل از نوع برنولی تبدیل نموده و سپس آن را حل کنید.

$$y'\sin y=(1-x\cos y)\cos y$$

۳- فقط یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر به‌دست آورید.

$$y''-5y'+6y=\sin 4x$$

۴- معادله‌ی مسیرهای قائم بر منحنی $y=\frac{c}{1-\sin x}$ را پیدا کنید.

۵- معادله‌ی کوشی اویلر زیر را حل کنید.

$$x^2y''+2xy'+y=0$$

۶- تبدیلات لاپلاس زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$L\left[\int_0^t e^{2x}\cosh 5x\,dx\right]$$

ب)

$$L\left[K(x^2u(x+3)\right]$$ (u تابع پله‌ای واحد است)

۷- تابع $f(t)$ را از رابطه‌ی زیر به‌دست آورید.

$$f(t)=2t^2+\int_0^t \sin(4u)f(t-u)\,du$$

پاسخ نمونه سؤالات

ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

سؤال در صفحه ۲

۱- الف)

$$y' = e^y + 2xy' \Rightarrow y' - 2xy' = e^y \Rightarrow y'(1-2x) = e^y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1-2x} \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = \frac{dx}{1-2x} \Rightarrow e^{-y}dy = \frac{dx}{1-2x}$$

$$-e^{-y} = -\frac{1}{2}\ln(1-2x) - \ln c \Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{2}\ln(1-2x)c \Rightarrow -y = \ln(\ln\sqrt{(1-2x)c}) \Rightarrow y = -\ln(\ln\sqrt{(1-2x)c})$$

ب)

$$y' = 2\tan x\sec x - y^2\sin x\,,\ \ y = \sec x$$

معادله داده شده معادله‌ی ریکاتی است. پس با تغییر متغیر $y = \frac{1}{u} + \sec x$ داریم:

$$y' = \frac{-u'}{u^2} + \sec x\tan x \xRightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} -\frac{u'}{u^2} + \sec x\tan x = 2\tan x\sec x - (\frac{1}{u} + \sec x)^2\sin x$$

$$-\frac{u'}{u^2} - \sec x\tan x = 2\tan x\sec x - \frac{\sin x}{u^2} - \tan x\sec x + \frac{2\tan x}{u} \Rightarrow u' - \sin x + 2u\tan x = 0 \Rightarrow u' + 2u\tan x = \sin x$$

حال باید معادله خطی بدست آمده را حل نمائیم:

$$\mu(x) = e^{\int 2\tan x dx} = e^{2\ln\cos x} = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\int\cos^2 x\sin x dx + c\right] = \frac{1}{\cos^2 x}\left[-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right] \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{3}\cos x + \frac{c}{\cos^2 x}$$

در نتیجه با جایگذاری u در رابطه‌ی $y = \frac{1}{u} + \sec x$ داریم:

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{3}\cos x + \frac{c}{\cos^2 x}} + \sec x$$

۲-

$$y = c(\sec x + \tan x) \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{مشتق}} y' = c(\sec x\tan x + \sec^2 x) \Rightarrow y' = c\sec x(\sec x + \tan x) \Rightarrow y' = y\sec x$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } y' \text{ با } -\frac{1}{y'}} -\frac{1}{y'} = y\sec x \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = y\sec x \Rightarrow -\frac{dx}{\sec x} = ydy \Rightarrow -\cos xdx = ydy \Rightarrow -\sin x = \frac{y^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \sin x = c$$

۳- از آنجا که $y_1 = \sin e^x$ یک جواب معادله‌ی همگن است پس جواب دوم معادله، $y_2(x)$ برابر با $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ می‌باشد که در آن داریم:

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{\sin^2(e^x)} e^{\int dx} dx = \int \frac{e^x}{\sin^2(e^x)} dx = -\cot(e^x) \Rightarrow y_2(x) = -\cot(e^x)\sin(e^x)$$

پس جواب عمومی معادله به صورت زیر است.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y = c_1 \sin(e^x) - c_2 \cot(e^x)\sin(e^x) = c_1 \sin(e^x) - c_2 \cos(e^x)$$

۴- ابتدا صورت همگن معادله را می‌نویسیم و برای آن معادله‌ی شاخص را به دست می‌آوریم:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \Rightarrow (D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0 \;\Rightarrow\; (D-1)^3 = 0 \Rightarrow D = 1$$

پس جواب عمومی معادله همگن $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ به صورت $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$ خواهد بود. حال برای به دست آوردن جواب خصوصی معادله داریم:

$$y_p = (Ax + B)x^3 e^x$$

$$y_p' = (4Ax^3 + 3Bx^2)e^x + (Ax^4 + Bx^3)e^x$$

$$y_p'' = (12Ax^2 + 6Bx)e^x + (4Ax^3 + 3Bx^2)e^x + (4Ax^3 + 3Bx^2)e^x + (Ax^4 + Bx^3)e^x$$

$$y_p''' = (24Ax + 6B)e^x + (12Ax^2 + 6Bx)e^x + (12Ax^2 + 6Bx)e^x + (4Ax^3 + 3Bx^2)e^x$$

$$+(12Ax^2 + 6Bx)e^x + (4Ax^3 + 3Bx^2)e^x + (4Ax^3 + 3Bx^2)e^x + (Ax^4 + Bx^3)e^x$$

حال با جایگذاری در معادله داریم:

$$e^x\Big[(24Ax + 6B + 12Ax^2 + 6Bx + 12Ax^2 + 6Bx + 4Ax^3 + 3Bx^2 + 12Ax^2 + 6Bx + 4Ax^3 + 3Bx^2$$

$$+4Ax^3 + 3Bx^2 + Ax^4 + Bx^3) - 3(12Ax^2 + 6Bx + 4Ax^3 + 3Bx^2 + 4Ax^3 + 3Bx^2 + Ax^4$$

$$+Bx^3) + 3(4Ax^3 + 3Bx^2 + Ax^4 + Bx^3 - (Ax^4 + Bx^3)\Big] = xe^x$$

$$\Rightarrow 6B + 24Ax + (36A - 36A - 18B + 18B)x^2 + (24A - 24A + 4B - 4B)x^3 + (4A - 4A)x^4 = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6B = 0 \\ 24A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{24}, B = 0$$

$$y_P = \frac{1}{24}x^4 e^x \xrightarrow{\text{جواب عمومی معادله}} y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + \frac{1}{24}\lambda^4 e^x$$

ب) با تغییر متغیر $\frac{y'}{x} = t$ داریم:

$$\begin{cases} y' = xt \\ y'' = t + xt' \end{cases}$$

$$\Rightarrow t + xt' = t\ln t \Rightarrow xt' = t\ln t - t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{t\ln t - t}{x}$$

$$\frac{dt}{t\ln t - t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{t}\frac{dt}{(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\ln t - 1) = \ln x + c \Rightarrow \ln(\ln t - 1) = \ln cx \Rightarrow \ln(t) - 1 = cx \Rightarrow e^{cx+1} = t$$

$$\xrightarrow{t = \frac{y'}{x}} \frac{y'}{x} = e^{cx+1} \Rightarrow y' = x(e^{cx+1}) \Rightarrow y = \int x(e^{cx+1})dx$$

$$y = (\frac{x}{c}e^{cx+1} - \frac{1}{c}\int e^{cx+1}dx) + c_1 \qquad y = \frac{x}{c}e^{cx+1} - \frac{1}{c^2}e^{cx+1} + c_1 = \frac{e^{cx+1}}{c}(x - \frac{1}{c}) + c_1$$

۵- الف)

$$(x)=e^{x}\left[1+\int_{0}^{x}e^{-t}y(t)dt\right]$$

$$Y(x)=\left[e^{x}+\int_{0}^{x}e^{x-t}y(t)dt\Rightarrow y(x)=e^{x}+y(x)*e^{x}\right.$$

از دو طرف رابطه لاپلاس می‌گیریم:

$$Y(s)=\frac{1}{s-1}+Y(s).\frac{1}{s-1}\Rightarrow Y(s)(1-\frac{1}{s-1})=\frac{1}{s-1}\Rightarrow Y(s)(\frac{s-2}{s-1})=\frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{s-2}{s-1}}=\frac{1}{s-2}\Rightarrow y(t)=e^{2t}$$

ب)

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^{2}+s+1}e^{-\pi s}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}}e^{-\pi s}\right]$$

$$u_{\pi}(t)L^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}}\right]_{t\to t-\pi}=u_{\pi}(t)e^{\frac{\pi-t}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2})$$

۶- از دو طرف هر یک از معادلات لاپلاس می‌گیریم:

$$s^{2}X(s)-sx(0)-x'(0)-X(s)+5[sY(s)-y(0)]=L[6t(u_{0}(t)-u_{2}(t))+12u_{2}(t)]$$

$$s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0)-4Y(s)-2[sX(s)-x(0)]=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(s^{2}-1)X(s)+5sY(s)=L[6tu_{0}(t)+(12-6t)u_{2}(t)]\\(s^{2}-4)Y(s)-2sX(s)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(s^{2}-1)X(s)+5sY(s)=\frac{6}{s^{2}}(1-e^{-2s})\\-5sY(s)+\frac{10s^{2}X(s)}{s^{2}-4}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow X(s)(s^{2}-1+\frac{10s^{2}}{s^{2}-4})=\frac{6}{s^{2}}(1-e^{-2s})\Rightarrow X(s)=\frac{\frac{6}{s^{2}}(1-e^{-2s})}{\frac{s^{4}+5s^{2}+4}{s^{2}-4}}$$

$$X(s)=\frac{6(s^{2}-4)(1-e^{-2s})}{s^{2}(s^{2}+4)(s^{2}+1)}=6(1-e^{-2s})(\frac{-1}{s^{2}}-\frac{2}{3(s^{2}+4)}+\frac{5}{3(s^{2}+1)})$$

$$X(t)=L^{-1}[X(s)]=6\left(-t+u_{2}(t)(t-2)-\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{1}{3}u_{2}(t)\sin 2(t-2)+\frac{5}{3}\sin t-\frac{5}{3}u_{2}(t)\sin(t-2)\right)$$

شهریورماه ۱۳۸۳

سؤال در صفحه ۳

۱- ابتدا عامل انتگرال‌ساز را محاسبه می‌کنیم:

$$(x-(\sec y\ln x)dy+(\tan y-\frac{y}{x}\sec y)dx=0$$

$$\begin{cases} P=\tan y-\frac{y}{x}\sec y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=(1+\tan^2 y-\frac{\sec y}{x}-\frac{y}{x}\sec y\tan y) \\ Q=x-(\sec y)\ln x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=(1-\frac{\sec y}{x}) \end{cases}$$

$$g(y)=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{1-\frac{\sec y}{x}-1-\tan^2 y+\frac{\sec y}{x}+\frac{y}{x}\sec\tan y}{\tan y-\frac{y}{x}\sec y}=\frac{-\tan^2 y+\frac{y}{x}\sec y\tan y}{\tan y-\frac{y}{x}\sec y}$$

$$g(y)=\frac{-\tan y(\tan y-\frac{y}{x}\sec y)}{\tan y-\frac{y}{x}\sec y}=-\tan y\Rightarrow \mu=e^{-\int\tan y dy}=e^{\ln\cos y}=\cos y$$

حال معادله را در $\cos y$ ضرب می‌کنیم تا به یک معادله‌ی کامل تبدیل شود.

$$\cos y(x-(\sec y)\ln x)dy+\cos y(\tan y-\frac{y}{x}\sec y)dx=0$$

$$\Rightarrow (x\cos y-\ln x)dy+(\sin y-\frac{y}{x})dx=0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=P=\sin y-\frac{y}{x} \\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q=x\cos y-\ln x \end{cases}$$

حال برای یافتن F از $\frac{\partial F}{\partial y}$ با فرض ثابت بودن x، نسبت به y انتگرال می‌گیریم:

$$F=\int(x\cos y-\ln x)dy=x\sin y-y\ln x+g(x)$$

که در آن g تابع دلخواهی از x است، حال باید g را به قسمی انتخاب کنیم که شرط $\frac{\partial F}{\partial x}$ نیز برقرار باشد.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\sin y-\frac{y}{x}+g'(x)=\sin y-\frac{y}{x}\ \Rightarrow\ g'(x)=0\ \Rightarrow\ g(x)=k$$

در نتیجه داریم:

$$F(x,y)=x\sin y-y\ln x+k$$

پس جواب عمومی برابر $x\sin y-y\ln x=c$ است.

۲- معادله داده شده معادله ریکاتی است.

$$y'=x(\ln x)^2-2xy\ln x+\frac{1}{x}+xy^2$$

برای حل این معادله با استفاده از تغییر متغیر $y=\frac{1}{u}+\ln x$ داریم:

$$y'=\frac{-u'}{u^2}+\frac{1}{x}\xrightarrow[\text{رابطه}]{\text{جایگذاری در}}\frac{-u'}{u^2}+\frac{1}{x}=x(\ln x)^2-2x(\frac{1}{u}+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}+x(\frac{1}{u}+\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{-u'}{u^2}+\frac{1}{x}-x(\ln x)^2+\frac{2x\ln x}{u}+2x(\ln x)^2-\frac{1}{x}-\frac{x}{u^2}-x(\ln x)^2-\frac{2x\ln x}{u}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-u'}{u^2}-\frac{x}{u^2}=0 \Rightarrow u'=-x \Rightarrow u=\frac{-x^2}{2}+C$$

با جایگذاری در رابطه‌ی $y=\frac{1}{u}+\ln x$ جواب معادله بدست می‌آید.

$$y=\frac{1}{\frac{-x^2}{2}+c}+\ln x$$

۳- اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله همگن باشد، آنگاه جواب دوم معادله $y_2(x)$ برابر است با:

$$y_2(x)=u(x)y_1(x) \quad , \quad u(x)=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$$

پس ابتدا باید جواب دوم مسئله را به دست آوریم.

$$u(x)=\int\frac{1}{\sin^2(e^x)}e^{-\int -dx}dx=\int\frac{e^x}{\sin^2(e^x)}dx=-\cot(e^x)$$

$$\Rightarrow y_2(x)=-\cot(e^x)\times\sin(e^x)=-\cos(e^x)$$

حال برای محاسبه جواب عمومی معادله، باید یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن داده شده بدست آوریم:

$$y_P=c_1(x)\sin(e^x)-\cos(e^x)c_2(x)\Rightarrow\begin{cases}c_1'(x)\sin(e^x)-\cos e^x c_2'(x)=0\\ c_1'(x)e^x\cos(e^x)+e^x\sin(e^x)c_2'(x)=e^{2x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1'(x)\sin(e^x)-\cos(e^x)c_2'(x)=0 \quad \Rightarrow e^x c_1'(x)=e^{2x}\cos(e^x)\Rightarrow c_1'(x)=e^x\cos(e^x)\\ c_1'(x)e^x\cos(e^x)+c_2'(x)e^x\sin e^x \Rightarrow c_2'(x)=e^x\sin(e^x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_2(x)=-\cos(e^x)\\ c_1(x)=\sin(e^x)\end{cases}\Rightarrow y_P=\sin^2(e^x)+\cos^2(e^x)=1$$

بنابراین جواب عمومی معادله ناهمگن مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$y=c_1\sin(e^x)-c_2\cos e^x+1$$

۴- ابتدا جواب عمومی معادله همگن وابسته به آن را به دست می‌آوریم:

$$y''+y=0 \Rightarrow (D^2+1)y=0 \Rightarrow D=\pm i \Rightarrow y=C_1\sin x+C_2\cos x$$

با توجه به سمت راست معادله صورت مسأله جواب خصوصی معادله به شکل زیر خواهد بود:

$$y_P=(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)$$

$$y_P'=(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)$$

$$y_P''=(12Ax^2+6Bx+2C)$$

حال روابط بالا را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 3x^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \\ 12A + C = 0 \Rightarrow C = -36 \\ 6B + D = 0 \Rightarrow D = 0 \\ 2C + E = 0 \Rightarrow E = 72 \end{cases} \Rightarrow y_P = 3x^4 - 36x^2 + 72$$

بنابراین جواب عمومی معادله ناهمگن برابر است با:

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 3x^4 - 36x^2 + 72$$

۵- الف)

$$x^2 y'' + xy' - y = 4$$

با بکار بردن تغییر متغیر $u = \ln x$ روی بازه‌ی $(0,\infty)$ در معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$xD(y) = x\frac{dy(x)}{dx} = e^u \frac{dy(u)}{du}\frac{du}{dx}$$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-u}$، با قرار دادن این مقدار در رابطه بالا به دست می‌آوریم که:

$$xD(y) = \frac{dy(u)}{du} = Dy(u)$$

با استفاده مجدد از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$x^2 D^2 y(x) = \frac{x^2 d^2 y}{dx^2} = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) = e^{2u}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy(u)}{du}\frac{du}{dx}\right)$$

و با قرار دادن $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-x}$ در رابطه بالا به دست می‌آوریم:

$$x^2 D^2 y(x) = e^{2u}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy(u)}{du}\frac{1}{x}\right) = e^{2u}\frac{d}{du}\left(\frac{dy(u)}{du}e^{-u}\right)\frac{du}{dx} = e^{2u}\left(\frac{d^2 y(u)}{du^2}e^{-u} - \frac{dy(u)}{du}e^{-u}\right)e^{-u}$$

$$= \frac{d^2 y(u)}{du^2} - \frac{dy(u)}{du}e^{-u} = (D^2 - D)y(u) = D(D-1)y(u)$$

با استفاده از استقرار داریم:

$$x^n D^n (y(x)) = D(D-1)\cdots(D-n+1)y(u)$$

پس با به کار بردن تغییر متغیر $u = \ln x$ و رابطه‌ی بالا داریم:

$$D(D-1)y + Dy - y = 4 \Rightarrow (D^2 - 1)y = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

$$y''(u) - y(u) = 4$$

در نتیجه جواب عمومی معادله همگن به صورت $y(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$ است.

با توجه به سمت راست معادله جواب خصوصی معادله‌ی بالا به شکل زیر است:

$$y_P = A$$

با قرار دادن معادله‌ی y_P در معادله‌ی $y''(u) - y(u) = 4$ داریم:

$$y'_P = y''_P = 0$$

پس جواب عمومی معادله $y''(u) - y(u) = ۴$ به دست می‌آید:

$$۰ - A = ۴ \Rightarrow A = -۴$$

$$y(u) = c_۱ e^{u} + c_۲ e^{-u} - ۴$$

حال با قرار دادن $u = \ln x$ جواب عمومی معادله‌ی اصلی به صورت زیر درمی‌آید:

$$y(x) = c_۱ x + \frac{c_۲}{x} - ۴$$

ب) ابتدا جواب عمومی معادله همگن $y''' - y'' + y' = ۰$ را به دست می‌آوریم:

$$(D^۳ - D^۲ + D)y = ۰ \;\Rightarrow\; D(D^۲ - D + ۱) = ۰ \;\Rightarrow\; \begin{cases} D = ۰ \;\Rightarrow\; y(x) = ۱ \\ D = \frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\frac{۳}{۲}}i \;\Rightarrow\; y_۲(x) = e^{\frac{۱}{۲}x}(c_۱ \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۲ \sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}) \end{cases}$$

پس جواب خصوصی معادله به کمک سمت راست معادله به صورت زیر است (۱ ضریب x یکی از جواب‌های معادله همگن است):

$$y_P = (Ax + B)e^{۲x} + x(Cx + D)$$

ج) ابتدا جواب‌های عمومی معادله همگن $y'' + ۳y' + ۳y = ۰$ را به دست آوریم:

$$(D^۲ + ۳D + ۳)y = ۰ \;\Rightarrow\; D = -\frac{۳}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}i}{۲} \;\Rightarrow\; y(x) = e^{\frac{-۳}{۲}x}(c_۱ \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۲ \sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$$

پس $e^{\frac{-۳}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}x}{۲}$ و $e^{\frac{-۳}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x$ جواب‌های مستقل خطی شکل همگن می‌باشند.

y_P جواب خصوصی شکل غیرهمگن می‌باشد و عبارت است از:

$$y_P = y_۱V_۱ + y_۲V_۲$$

$$x_۱(y_۱(x), y_۲(x) = \begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ \\ y'_۱ & y'_۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\frac{-۳}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x & e^{\frac{-۳}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x \\ \frac{-۳}{۲}e^{\frac{-۳}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}e^{\frac{-۳}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}x}{۲} & \frac{-۳}{۲}e^{\frac{-۳}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}x}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}e^{\frac{-۳}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}e^{-۳x}$$

$$V_۱ = -\int \frac{y_۲(x)h(x)}{W(y_۱(x), y_۲(x)}dx = -\int \frac{e^{\frac{-۳}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x.\sinh x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}e^{-۳x}}$$

$$= V_۲ = \int \frac{y_۱(x)h(x)}{W(y_۱(x), y_۲(x))} = \int \frac{e^{\frac{-۳}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x.\sinh x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}e^{-۳x}}$$

پس جواب خصوصی معادله به صورت زیر است:

$$\Rightarrow\; y_P = -e^{\frac{-۳}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\int\frac{۲e^{\frac{۳}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x.\sinh x}{\sqrt{۳}} + e^{\frac{-۳}{۲}x}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\int\frac{۲e^{\frac{۳}{۲}x}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\sinh x}{\sqrt{۳}}$$

۶-

$$F(s)=L[f(x)]=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$$

انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ برابر است با تبدیل لاپلاس تابع $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ به ازای $s=0$ پس داریم:

$$L(\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t})=\int_{s}^{\infty}(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b})ds\Big|_{s=0}$$

$$=\ln(s+a)-\ln(s+b)\Big|_{s=0}=\ln\frac{s+b}{s+a}\Big|_{s=0}=\ln\frac{b}{a}$$

۷- از آنجا که داریم:

$$L[xf(x)]=-F'(s)$$

$$L[xy''(x)]+L\left[\int_{0}^{x}e^{3u}\cos 2u\,du\right]=-(L[y''(x)])'+\underbrace{L\left[e^{3x}\cos 2x*(1)\right]}_{L[e^{3x}\cos 2x]L[1]}$$

$$=-(s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0))'+\frac{(s-3)}{(s-3)^{2}+4}.\frac{1}{s}$$

$$=-(s^{2}Y(s)-3s)'+\frac{s-3}{(s-3)^{2}+4}.\frac{1}{s}=-(2sY(s)+Y'(s)s^{2}-3)+\frac{s-3}{(s-3)^{2}+4}.\frac{1}{s}$$

ترم دوم ۸۳-۱۳۸۲

سؤال در صفحه ۴

۱- الف)

$$(xy'-y)\cos(\frac{2y}{x})=-3x^2$$

$$\Rightarrow\ x(y'-\frac{y}{x})\cos(\frac{2y}{x})=-3x^2\ \Rightarrow\ (y'-\frac{y}{x})\cos(\frac{2y}{x})=-3x$$

حال با فرض $u=\frac{y}{x}$ و $y'=u+xu'$ داریم:

$$(u+xu'-u)\cos(2u)=-3x\ \Rightarrow\ xu'\cos 2u=-3x$$

$$\Rightarrow\ u'\cos 2u=-3\ \Rightarrow\ u'=\frac{-3}{\cos 2u}\ \Rightarrow\ u=\frac{-3}{2}\ln|\sec 2u+\tan 2u|+c$$

حال با جایگذاری $u=\frac{y}{x}$ داریم:

$$y=\frac{-3}{2}x\ln\left|\sec\frac{2y}{x}+\tan\frac{2y}{x}\right|+c$$

ب)

$$\underbrace{1}_{P}dx+\underbrace{(\frac{x}{y}-\sin y)}_{Q}dy=0\qquad (I)$$

ابتدا عامل انتگرال‌ساز را محاسبه می‌کنیم:

$$g(y)=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{\frac{1}{y}}{1}=\frac{1}{y}\ \Rightarrow\ \text{عامل انتگرال‌ساز}\ \mu=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$$

حال معادله (I) را در μ ضرب می‌کنیم:

$$ydx+(x-y\sin y)dy=0$$

معادله به یک معادله‌ی کامل تبدیل شده است، برای به دست آوردن جواب معادله داریم:

$$\begin{cases}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x-y\sin y\end{cases}$$

از رابطه‌ی اول برحسب x انتگرال می‌گیریم پس:

$$f(x,y)=yx+h(y)$$

حال از رابطه‌ی بدست آمده برحسب y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x+h'(y)\ \Rightarrow\ h'(y)=-y\sin y\ \Rightarrow\ h(y)=-(\sin y-y\cos y+c)$$

$$\Rightarrow\ h(y)=y\cos y-\sin y-c\ \Rightarrow\ f(x,y)=yx+y\cos y-\sin y-c$$

پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$yx+y\cos y-\sin y=c$$

۲- همانطور که قبلاً اثبات کردیم داریم:

$$x^n D^n(y(x)) = D(D-1)\cdots(D-n+1)y(u)$$

پس با به کار بردن تغییر متغیر $u = \ln x$ و رابطه‌ی بالا داریم:

$$D(D-1)y - 2Dy + 2y = e^{-2u} \Rightarrow y''(u) - 3y'(u) + 2y(u) = e^{-2u} \quad (I)$$

حال جواب عمومی معادله‌ی همگن را به کمک معادله‌ی مشخصه به دست می‌آوریم:

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = 1 \\ D = 2 \end{cases} \Rightarrow y(u) = c_1 e^{u} + c_2 e^{2u}$$

حال به کمک سمت راست معادله‌ی ناهمگن (I)، y_P را محاسبه می‌کنیم:

$$y_P = Ae^{-2u} \quad , \quad y'_P = -2Ae^{-2u} \quad , \quad y''_P = 4Ae^{-2u}$$

با قرار دادن معادله‌ی y_P در رابطه‌ی $y''(u) - 3y'(u) + 2y(u) = e^{-2u}$ به دست می‌آید:

$$4Ae^{-2u} + 6Ae^{-2u} + 2Ae^{-2u} = e^{-2u} \Rightarrow 12Ae^{-2u} = e^{-2u} \Rightarrow A = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow y_P = \frac{1}{12}e^{-2u}$$

پس جواب عمومی معادله‌ی $y''(u) - 3y'(u) + 2y(u) = e^{-2u}$ برابر است با:

$$y(u) = c_1 e^{u} + c_2 e^{2u} + \frac{1}{12}e^{-2u}$$

با قرار دادن $u = \ln x$ جواب عمومی معادله‌ی اصلی به‌دست می‌آید:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{12x^2}$$

۳- اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله‌ی همگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد، آنگاه جواب دوم معادله‌ی $y_2(x)$ برابر است با:

$$y_2(x) = u(x)y(x) \quad , \quad u(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx} dx$$

از آنجا که $P(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ پس داریم:

$$u(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} e^{-\ln x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = \tan x \times \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

از آنجا که جواب عمومی معادله‌ی ناهمگن به صورت $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_P$ است، پس مقدار y_P را محاسبه می‌کنیم:

$$y_P = V_1 y_1 + V_2 y_2 \quad , \quad V_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad , \quad V_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

از آنجا که $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$ پس:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} & \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \\ \frac{-2x\sin x - \cos x}{2x^{\frac{3}{2}}} & \frac{2x\cos x - \sin x}{2x^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix}$$

$$W(y_1,y_2)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\left(\frac{2x\cos x-\sin x}{2x^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\frac{2x\sin x+\cos x}{2x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\frac{2x\cos^2 x-\sin x\cos x}{2x^2}+\frac{2x\sin^2 x+\sin x\cos x}{2x^2}=\frac{2x}{2x^2}=\frac{1}{x}$$

حال از آنجا که $R(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ پس V_1 و V_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$V_1=\int\frac{-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}dx=\int-\sin x dx=\cos x$$

$$=V_2=\int\frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\int\cos x dx=\sin x$$

پس مقدار y_P برابر است با:

$$y_P=\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله‌ی ناهمگن داده شده به صورت زیر است:

$$y(x)=c_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+c_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

-۴

$$y''+4y'+4y=u_1(t)+u_2(t)\quad,\quad y(0)=y'(0)=0$$

از دو طرف رابطه‌ی لاپلاس می‌گیریم:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4sY(s)-4y(0)+4Y(s)=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\Rightarrow(s^2+4s+4)Y(s)=\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{S}\Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(s+2)^2}$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\left(e^{-s}+e^{-2s}\right)\frac{1}{s(s+2)^2}\right]=L^{-1}\left[(e^{-s}+e^{-2s})\left(\frac{1}{4s}-\frac{1}{4(s+2)}-\frac{2}{2(s+2)^2}\right)\right]$$

$$=u_1(t)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1)\right)_{t\to t-1}+u_2(t)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1)\right)_{t\to t-2}$$

$$=u_1(t)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2(t-1)}(2t-1)\right)+u_2(t)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2(t-2)}(2t-3)\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=u_1(t)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t+2}(2t-1)\right)+u_2(t)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t+4}(2t-3)\right)$$

۵- الف)

$$f(x)=x(u_0(x)-u_{\frac{\pi}{2}}(x))+\sin 3x(u_{\frac{\pi}{2}}(x)-u_{2\pi}(x))+\cos x(u_{2\pi}(x))$$

$$\Rightarrow f(x)=xu_0(x)+(\sin 3x-x)u_{\frac{\pi}{2}}(x)+(\cos x-\sin 3x)u_{2\pi}(x)$$

$$\Rightarrow L[f(x)] = L[x] + e^{-\frac{\pi}{2}s} L\left[\sin(3x + \frac{3\pi}{2}) - x - \frac{\pi}{2}\right] + e^{-2\pi s} L\left[\cos(x + 2\pi) - \sin(3x + 6\pi)\right]$$

$$\Rightarrow L[f(x)] = L[x] + e^{-\frac{\pi}{2}s} L\left[-\cos 3x - x - \frac{\pi}{2}\right] - e^{-2\pi s} L\left[\cos x - \sin 3x\right]$$

$$L[f(x)] = \frac{1}{s^2} - e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{2s}\right) + e^{-2\pi s}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+9}\right)$$

ب)

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[Ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+5S}\right)\right]$$

$$F(s) = Ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+5s}\right) \Rightarrow F'(s) = \frac{\frac{5s^2-2s-5}{(s^2+5s)^2}}{\frac{s^2+1}{s^2+5s}} = \frac{5s^2-2s-5}{(s^2+1)(s^2+5s)}$$

از آنجا که داریم $-\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)] = f(t)$ پس:

$$L^{-1}[F'(s)] = L^{-1}\left[\frac{5s^2-2s-5}{(s^2+1)(s^2+5s)}\right] = L^{-1}\left[\frac{5}{s(s+5)} - \frac{2}{s(s^2+1)}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5} - \frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+1}\right] = 1 - e^{-5t} - 2 + 2\cos t$$

$$= 2\cos t - e^{-5t} - 1 \Rightarrow L^{-1}[F(s)] = f(t) = -\frac{1}{t}(2\cos t - e^{-5t} - 1)$$

۶- از دو طرف هر دو معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + sX(s) - x(0) + Y(s) = 0 \\ sY(s) - y(0) + \underbrace{L(x(t) * 1)}_{L[x(t)]L[1]} + X(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+s)X(s) + Y(s) = 1 \\ sY(s) + X(s)(\frac{1}{s}+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -s(s^2+s)X(s) - sY(s) = -s \\ sY(s) + X(s)(\frac{1}{s}+1) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(s)(-s^3 - s^2 + \frac{1}{s} + 1) = -s + 1 \Rightarrow X(s) = \frac{1-s}{\frac{-s^4 - s^3 + s + 1}{s}}$$

$$X(S) = \frac{s(1-s)}{1 + s - s^3 - s^4} = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s^2+s+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+s+1}\right]$$

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}+\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$

$$x(t)=-e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

از طرفی برای به‌دست آوردن $y(t)$ داریم:

$$sY(s)+\frac{s}{(s+1)(s^2+s+1)}(\frac{1}{s}+1)=1$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1-\frac{s}{(s+1)(s^2+s+1)}(\frac{s+1}{s})}{s}=\frac{1-\frac{1}{s^2+s+1}}{s}=\frac{\frac{s^2+s}{s^2+s+1}}{s}$$

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}\Rightarrow y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+s+1}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

ترم اول ۸۳-۱۳۸۲

سؤال در صفحه ۵

۱- الف)

$$xy' = y + x\sin(\frac{y-x}{x}) \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sin(\frac{y}{x} - ۱)$$

حال با تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ و $y' = u + xu'$ داریم:

$$u + xu' = u + \sin(u-۱) \Rightarrow u' = \frac{\sin(u-۱)}{x} \Rightarrow \frac{du}{\sin(u-۱)} = \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|\csc(u-۱) + \cot(u-۱)| = \ln|x| + c \Rightarrow \frac{۱}{|\csc(u-۱) + \cot(u-۱)|} = |cx|$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{۱}{\csc(\frac{y}{x} - ۱) + \cot(\frac{y}{x} - ۱)} = \pm cx \Rightarrow \pm cx(\csc(\frac{y-x}{x}) + \cot(\frac{y-x}{x})) = ۱$$

ب)

$$P = \tan(x - \frac{P}{۱+P^۲}) \quad ; \quad y' = P$$

$$\operatorname{Arc}\tan P = x - \frac{P}{۱+P^۲} \Rightarrow x = \operatorname{Arc}\tan P + \frac{P}{۱+P^۲}$$

حال از رابطه‌ی به‌دست آمده برحسب y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۱}{P} = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dP}{dy}}{۱+P^۲} + \frac{\frac{dP}{dy} - P^۲\frac{dP}{dy}}{(۱+P^۲)^۲} \Rightarrow \frac{۱}{P} = \frac{\frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dy}P^۲ + \frac{dP}{dy} - P^۲\frac{dP}{dy}}{(۱+P^۲)^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{P} = ۲\frac{\frac{dP}{dy}}{(۱+P^۲)} \Rightarrow \frac{۲PdP}{(۱+P^۲)^۲} = dy \Rightarrow y = -\frac{۱}{(۱+P^۲)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{Arc}\tan t + \frac{t}{۱+t^۲} \\ y = \frac{-۱}{۱+t^۲} \end{cases}$$

ج)

$$(۱ + \frac{x^۳}{y}\sin^۲ x)dx + \frac{۱}{y}(x + \frac{۱}{\cos^۲(۲y)})dy = ۰ \qquad (I)$$

با استفاده از عامل انتگرال‌ساز داریم:

$$P = ۱ + \frac{x^۳}{y}\sin^۲ x \quad , \quad Q = \frac{۱}{y}(x + \frac{۱}{\cos^۲(۲y)})$$

$$g(y) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{\frac{۱}{y} + \frac{x^۳}{y^۲}\sin^۲ x}{۱ + \frac{x^۳}{y}\sin^۲ x} = \frac{\frac{۱}{y}(۱ + \frac{x^۳}{y}\sin^۲ x)}{۱ + \frac{x^۳}{y}\sin^۲ x} = \frac{۱}{y}$$

عامل انتگرال‌ساز $\mu = e^{\int \frac{۱}{y}dy} = e^{\ln y} = y$

حال با ضرب معادله‌ی I در عامل انتگرال‌ساز:

$$y + x^{3}\sin^{2} x)dx + (x + \frac{1}{\cos^{2}(2y)})dy = 0$$

معادله به معادله‌ی کامل تبدیل شده پس داریم:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y + x^{3}\sin^{2} x \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال‌گیری}} f(x,y) = y(x) + \int x^{3}\sin^{2} x dx + g(y) \qquad (*)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + \frac{1}{\cos^{2}(2y)} \qquad (**)$$

از رابطه‌ی (*) نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{\partial f''(x,y)}{\partial y} = x + g'(y) \xrightarrow[(**)]{\text{با مقایسه}} g'(y) = \frac{1}{\cos^{2}(2y)}$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{2}\tan 2y + c$$

حال با جایگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (*) خواهیم داشت:

$$f(x,y) = yx + \int x^{3}\sin^{2} x dx + \frac{1}{2}\tan 2y + c$$

-۲

$$y = c(\sec x + \tan x) \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{مشتق}} y' = c(\sec x \tan x + \sec^{2} x) \Rightarrow y' = c\sec x(\sec x + \tan x) \Rightarrow y' = y\sec x$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{y}]{\text{جایگذاری } y' \text{ با}} -\frac{1}{y'} = y\sec x \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = y\sec x \Rightarrow -\frac{dx}{\sec x} = ydy \Rightarrow -\cos x dx = ydy \Rightarrow -\sin x = \frac{y^{2}}{2} + c$$

$$\Rightarrow \frac{y^{2}}{2} + \sin x = c$$

-۳

$$xy'' + y' = (y')^{2}$$

با تغییر متغیر $y' = P$ و $y'' = \frac{dP}{dx}$ داریم:

$$x\frac{dP}{dx} + P = P^{2} \Rightarrow x\frac{dP}{dx} = P^{2} - P \Rightarrow \frac{dP}{P(P-1)} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{dP}{P} + \frac{dP}{P-1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|P| + \ln|P-1| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{P-1}{P}\right| = \ln|cx| \Rightarrow \frac{P-1}{P} = \pm cx \Rightarrow \pm Pcx = P - 1$$

$$P(\pm cx - 1) = -1 \Rightarrow P = y' = \frac{1}{1 \mp cx}$$

حال با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی به‌دست آمده داریم:

$$y = \mp\frac{1}{c}\ln|1 \mp cx|$$

۴- الف)

$$L[f(t)] = L[(u_0(t) - u_\pi(t)]\sin t - [u_{2\pi}(t)t]$$

$$\Rightarrow L[f(t)] = e^{0\times s}L[\sin(t+0)] - e^{-\pi s}L\underbrace{[\sin(t+\pi)]}_{-\sin t} - e^{-2\pi s}L[t+2\pi]$$

$$\Rightarrow L[f(t)] = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2\pi}{s}\right)$$

ب) با توجه به اینکه $L^{-1}[F(s)]$ را نمی‌توان مستقیماً با استفاده از فرمول‌های موجود به‌دست آورد پس به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\ln\left(\sqrt[3]{\frac{s}{s^2+1}}\right)\right] \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{s}{s^2+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dF(S)}{dS} = \frac{\dfrac{\dfrac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{s}{s^2+1}}} = \frac{\dfrac{\dfrac{-s^2+1}{(s^2+1)}}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{s}{s^2+1}}} = \frac{-s^2+1}{3(s^2+1)^2\sqrt[3]{\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)^2}\sqrt[3]{\dfrac{s}{s^2+1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{dF(s)}{ds} = \frac{1-s^2}{3(s^2+1)\times\dfrac{s}{s^2+1}} = \frac{1-s^2}{3s(s^2+1)}$$

از طرفی طبق قضیه‌ی مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس می‌دانیم که با فرض $L(f(t)) = F(s)$ داریم:

$$F'(s) = L[-tf(t)] \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}(F'(s)) \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1-s^2}{3s(s^2+1)}\right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{-1}{3t}L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\right] = -\frac{1}{3t}(1-2\cos t)$$

۵- از دو طرف هر دو معادله‌ی داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} L(x'(t) + L(\int_0^t y(u)du) = L(u(t)) \\ L(y'(t) + L(\int_0^t x(u)du) = L(u_2(t)) \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sX(s) - x(0) + \underbrace{L(y(t)*1)}_{L[y]L[1]} = \dfrac{e^{-s}}{s} \\ sY(s) - y(0) + \underbrace{L(x(t)*1)}_{L[x]L[1]} = \dfrac{e^{-2s}}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sX(s)+Y(s)(\frac{1}{s})=\frac{e^{-s}}{s} \\ sY(s)+X(s)(\frac{1}{s})=\frac{e^{-2s}}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s)+Y(s)\times\frac{1}{s^2}=\frac{e^{-s}}{s^2} \\ s^2Y(s)+X(s)=e^{-2s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s)(\frac{1}{s^2}-s^2)=\frac{e^{-s}}{s^2}-e^{-2s} \Rightarrow Y(s)(\frac{1-s^4}{s^2})=\frac{e^{-s}-s^2e^{-2s}}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{e^{-s}-s^2e^{-2s}}{1-s^4} \Rightarrow y(t)=L^{-1}(e^{-s}(\frac{1}{(1-s^2)(1+s^2)})-e^{-2s}(\frac{s^2}{(1-s^2)(1+s^2)})$$

$$Y(x)=L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{2}(\frac{1}{1-s^2}+\frac{1}{1+s^2})-\frac{e^{-2s}}{2}(\frac{1}{1-s^2}-\frac{1}{1+s^2})\right)$$

$$Y(x)=\frac{1}{2}u_1(t)L^{-1}\left[\frac{1}{1-s^2}+\frac{1}{1+s^2}\right]_{t\to t-1}-\frac{1}{2}u_2(t)L^{-1}\left[\frac{1}{1-s^2}-\frac{1}{1+s^2}\right]_{t\to t-2}$$

$$Y(x)=\frac{u_1(t)}{2}(-\sinh t+\sin t)_{t\to t-1}-\frac{u_2(t)}{2}(-\sin t-\sin t)_{t\to t-2}$$

$$Y(x)=\frac{u_1(t)}{2}(\sin(t-1)-\sinh(t-1))+\frac{u_2(t)}{2}(\sin(t-2)+\sinh(t-2))$$

۶- از طرفین رابطه لاپلاس می‌گیریم:

$$L[\varnothing(x)]+L[\varnothing(x)*x]=L[\sin 2x]$$

$$\Rightarrow L[\varnothing(x)]+L[\varnothing(x)](\frac{1}{s^2})=\frac{2}{s^2+4} \Rightarrow L[\varnothing(x)](1+\frac{1}{s^2})=\frac{2}{s^2+4}$$

$$L[\varnothing(x)]=\frac{\frac{2}{s^2+4}}{\frac{s^2+1}{s^2}}=\frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} \Rightarrow \varnothing(x)=L^{-1}\left[\frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$$

$$\varnothing(x)=L^{-1}\left[\frac{-\frac{2}{3}}{s^2+1}+\frac{\frac{8}{3}}{s^2+4}\right]=-\frac{2}{3}\sin t+\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\Rightarrow \varnothing(x)=-\frac{2}{3}\sin t+\frac{4}{3}\sin 2t$$

شهریورماه ۱۳۸۲

سؤال در صفحه ۶

۱- الف)

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0 \qquad (I)$$

ابتدا عامل انتگرال‌ساز را محاسبه می‌کنیم:

$$g(y) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{e^x \cot y - 0}{e^x} = \cot y$$

$$\mu = e^{\int \cot y dy} = e^{\ln \sin y} = \sin y$$

حال با ضرب عامل انتگرال‌ساز در معادله‌ی (I) داریم:

$$e^x \sin y dx + (e^x \cos y + 2y)dy = 0$$

از آنجا که معادله به یک معادله‌ی کامل تبدیل شده می‌توانیم آن را حل کنیم. پس:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x \sin y \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{با انتگرال‌گیری}} f(x,y) = e^x \sin y + h(y)$$

حال با مشتق‌گیری $f(x,y)$ نسبت به y و مقایسه‌ی آن با $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y + 2y$ داریم:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2 + c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \sin y e^x + y^2 + c$$

پس جواب عمومی برابر است با:

$$\sin y e^x + y^2 = c$$

۲- الف)

$$4x^2 yy' - 3x(3y^2 + 2) + (3y^2 + 2)^3 = 0$$

با تغییر متغیر $3y^2 + 2 = u$ داریم:

$$\frac{du}{dx} = 6y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^2 \frac{du}{dx} - 3xu + u^3 = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{9}{2}\frac{xu}{2x^2} + \frac{3u^3}{2x^2} + \frac{3u^3}{2x^2} = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{9}{2}\frac{u}{x} + \frac{3}{2}\frac{u^3}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{9}{2}\frac{u}{x} = -\frac{3}{2}\frac{u^3}{x^2}$$

معادله به معادله‌ی برنولی تبدیل شده است که با تغییر متغیر $t = u^2$ و $\frac{dt}{dx} = -2u^{-3}\frac{du}{dx}$ داریم:

$$\frac{du}{dx}(-2u^{-3}) + 9\frac{u}{x}u^{-3} = 3\frac{u^3}{x^2}u^{-3} \Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{9t}{x} = \frac{3}{x^2}$$

حال معادله‌ی خطی مرتبه اول به‌دست آمده را حل می‌نماییم:

$$\mu = e^{\int \frac{9}{x}dx} = e^{9\ln x} = x^9$$

$$t(x)=\frac{1}{x^9}\left[\int x^9\times\frac{3}{x^2}dx+c\right]=\frac{1}{x^9}\left[3\frac{x^8}{8}+c\right]=\frac{3}{8x}+\frac{c}{x^9}$$

در اینجا باید تغییر متغیرهای داده شده را بار دیگر انجام دهیم تا به جواب مسئله‌ی اصلی برسیم، پس:

$$u^{-2}=\frac{3}{8x}+\frac{c}{x^9}\xrightarrow{u=3y^2+2}\frac{1}{(3y^2+2)^2}=\frac{3}{8x}+\frac{c}{x^9}=\frac{3x^8+8c}{8x^9}\Rightarrow(3y^2+2)^2=\frac{8x^9}{3x^8+c}$$

ب)

$$y'=y^2+(1-2x)y+x^2-x+1\Rightarrow y'-(1-2x)y=y^2+(x^2-x+1)$$

از آنجا که ظاهر معادله‌ی داده شده به صورت معادله‌ی ریکاتی است، پس می‌توان با حدس یک جواب خصوصی از آن مثل y_P و جایگزینی $y=\frac{1}{u}+y_P$ در معادله، آن را به یک معادله‌ی خطی تبدیل کرد. با دقت در صورت معادله زیاد دشوار نیست که بگوییم $y_P=x$ یک جواب خصوصی مسئله است، پس داریم:

$$y=\frac{1}{u}+x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{u^2}\frac{du}{dx}+1$$

حال با جایگذاری در صورت معادله داریم:

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+1-(1-2x)(\frac{1}{u}+x)=(\frac{1}{u}+x)^2+(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+1-\frac{1}{u}-x+\frac{2x}{u}+2x^2=\frac{1}{u^2}+\frac{2x}{u}+x^2+x^2-x+1$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=-(u+1)\Rightarrow-\frac{du}{u+1}=dx$$

$$\Rightarrow x=-\ln(u+1)$$

از آنجا که $y-x=\frac{1}{u}$ پس $u=\frac{1}{y-x}$ درنتیجه:

$$x=\ln\frac{1}{u+1}\Rightarrow x=\ln\frac{1}{\frac{1}{y-x}+1}=\ln\frac{1}{\frac{1+y-x}{y-x}}=\ln\frac{y-x}{1+y-x}\Rightarrow\frac{y-x}{1+y-x}=e^x$$

۳- الف)

$$x^2y''-xy'=2x^3\ln x$$

با به کار بردن تغییر متغیر $u=\ln x$ و رابطه‌ی $x^nD^n(y(x))=D(D-1)\cdots(D-n+1)y(u)$ داریم:

$$D(D-1)y-Dy=2ue^{3u}\Rightarrow y''-2y'=2ue^{3u}\qquad(I)$$

ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن را با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی آن به‌دست می‌آوریم:

$$(D^2-2D)y=0\Rightarrow\begin{cases}D=0\\D=2\end{cases}$$

پس جواب عموی معادله‌ی همگن به صورت $y(u)=c_1+c_2e^{2u}$ است.

حال به کمک سمت راست معادله‌ی ناهمگن (I) y_P را به‌دست می‌آوریم:

$$y_P = (Au+B)e^{3u} \quad , \quad y'_P = Ae^{2u} + 3(Au+B)e^{3u}$$

$$y''_P = 3Ae^{2u} + 3Ae^{3u} + 9(Au+B)e^{3u} = 6Ae^{3u} + 9(Au+B)e^{3u}$$

پس با قرار دادن y_P در معادله‌ی $y'' - 2y' = 2ue^{3u}$ داریم:

$$6Ae^{3u} + 9(Au+B)e^{3u} - 2Ae^{3u} - 6(Au+B)e^{3u} = 2ue^{3u}$$

$$\Rightarrow 6Ae^{3u} + 9Aue^{3u} + 9Be^{3u} - 2Ae^{3u} - 6Aue^{3u} - 6Be^{3u} = 2ue^{3u}$$

$$(6A + 9B - 2A - 6B)e^{3u} + (9A - 6A)ue^{3u} = 2ue^{3u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{8}{9} \\ 9A - 6A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow y_P = (\frac{2}{3}u - \frac{8}{9})e^{3u}$$

پس جواب عمومی معادله‌ی ناهمگن (I) برابر است با:

$$y(u) = c_1 + c_2 e^{2u} + (\frac{2}{3}u - \frac{8}{9})e^{3u}$$

حال با جایگذاری $u = \ln x$ جواب معادله‌ی اصلی به‌دست می‌آید:

$$y(x) = c_1 + c_2 x^2 + (\frac{2}{3}\ln x - \frac{8}{9})x^3$$

$$-2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$$

ب)

با تغییر متغیر $y' = P$ و $y'' = P\frac{dP}{dy}$ در معادله داریم:

$$2yP\frac{dP}{dy} - 3P^2 = 4y^2 \Rightarrow \frac{dP}{dy} + \frac{3P^2}{2yP} = \frac{-4y^2}{2yP}$$

$$\frac{dP}{dy} + \frac{3}{2y}P = -2yP^{-1} \qquad (I)$$

این معادله یک معادله‌ی برنولی است که با جانشینی $u = P^2$ می‌توان معادله را به یک معادله‌ی خطی برحسب u تبدیل کرد.

$$\frac{du}{dy} = 2P\frac{dp}{dy}$$

پس با ضرب طرفین رابطه‌ی (I) در $2P$ داریم:

$$2P\frac{dP}{dy} + \frac{3}{y}P^2 = -4y \Rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{3}{y}u = -4y$$

حال معادله‌ی خطی به‌دست آمده را می‌توان حل کرد:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3\ln y} = y^3 \Rightarrow u = \frac{1}{y^3}\left[\int y^3 \times (-4y)dy + c\right]$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{y^3}\left[-4\frac{y^5}{5} + c\right] = -4\frac{y^2}{5} + \frac{c}{y^3}$$

حال با جایگذاری $u = P^2$ و $y' = P$ داریم:

$$P^2 = -\frac{4y^2}{5} + \frac{c}{y^3} \xrightarrow{y'=P} (y')^2 = \frac{-4y^2}{5} + \frac{c}{y^3} \Rightarrow y' = \pm\sqrt{-\frac{4y^2}{5} + \frac{c}{y^3}}$$

$$y = \pm x\sqrt{-\frac{4y^2}{5} + \frac{c}{y^3}} + c_2$$

۴- معادله‌ی همگن $y'' + 9y = 0$ را در نظر می‌گیریم معادله‌ی مشخصه $D^2 + 9 = 0$ دارای ریشه‌های $D = \pm 3i$ است، درنتیجه جواب عمومی معادله‌ی همگن به صورت $y(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$ است. پس برای به‌دست آوردن جواب خصوصی معادله از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم:

$$y_P = c_1(x)\sin 3x + c_2(x)\cos 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x)\sin 3x + c_2'(x)\cos 3x = 0 \\ 3c_1'(x)\cos 3x - 3c_2'(x)\sin 3x = 3\sec^2 3x \end{cases}$$

با حل این دستگاه نسبت به $c_1'(x)$ و $c_2'(x)$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &3c_1'(x)\sin^2 3x + 3c_2'(x)\cos 3x \sin 3x = 0 \\ &3c_1'(x)\cos^2 3x - 3c_2'(x)\sin 3x \cos 3x = 3\sec^2 3x \cos 3x \end{aligned} \Rightarrow 6c_1'(x) = 3\sec 3x$$

$$\Rightarrow c_1'(x) = \frac{\sec 3x}{2} \quad , \quad c_2'(x) = \frac{-\sin 3x \sec^2 3x}{2}$$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) = \int \frac{\sec 3x}{2} = \frac{1}{6}\ln|\sec 3x + \tan 3x|$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) = \frac{1}{6}\int \frac{-3\sin 3x}{\cos^2 3x} = -\frac{1}{6}\cos^{-1} 3x = -\frac{1}{6}\sec 3x$$

پس مقدار y_P به صورت زیر به‌دست آمد:

$$P = \frac{1}{6}\ln|\sec 3x + \tan 3x|\sin 3x - \frac{1}{6}\sec 3x \cos 3x$$

درنتیجه جواب عمومی معادله‌ی ناهمگن داده شده برابر است با:

$$(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + \frac{1}{6}\ln|\sec 3x + \tan 3x|\sin 3x - \frac{1}{6}$$

-۵

$$L^{-1}\left[\ln\frac{s^2+1}{s-1} + \operatorname{arccot}(s-5)\right] = \underbrace{L^{-1}\left[\ln\frac{s^2+1}{s-1}\right]}_{I} + \underbrace{L^{-1}\left[\operatorname{arccot}(s-5)\right]}_{II}$$

حال هریک از عبارات I و II را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$(t) = L^{-1}\left[\ln\frac{s^2+1}{s-1}\right]$$

به کمک رابطه‌ی $-\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]=f(t)$ داریم:

$$F_1(s)=\ln\frac{s^2+1}{s-1}\Rightarrow F_1'(s)=\frac{s^2-2s-1}{(s-1)^2}\times\frac{s-1}{s^2+1}=\frac{s^2-2s-1}{(s^2+1)(s-1)}$$

$$\Rightarrow F_1'(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s-1}\Rightarrow L^{-1}[F_1'(s)]=2\cos t-e^t$$

$$\Rightarrow f_1(t)=-\frac{1}{t}(2\cos t-e^t)$$

حالا عبارت II را محاسبه می‌کنیم:

$$f_2(t)=L^{-1}[\operatorname{arccot}(S-5)]$$

$$F_2(s)=\operatorname{arccot}(s-5)\Rightarrow F_2'(s)=\frac{-1}{1+(s-5)^2}\Rightarrow L^{-1}[F_2'(s)]=-e^{5t}\sin t$$

$$\Rightarrow f_2(t)=-\frac{1}{t}(-e^{5t}\sin t)=\frac{e^{5t}\sin t}{t}$$

پس لاپلاس معکوس عبارت داده شده در صورت سؤال برابر است با:

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=\frac{1}{t}(e^t-2\cos t+e^{5t}\sin t)$$

۶- از دو طرف معادله‌ی داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y''(t)]+L[y'(t)]=L[\cos t]+L\left[\int_0^t\sin(t-u)y'(u)du\right]$$

$$s^2Y(S)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)=\frac{s}{s^2+1}+\underbrace{L[y'(t)*\sin(t)]}_{L[y'(t)].L[\sin(t)]}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)=\frac{s}{s^2+1}+((sY(s)-y(0)\times\frac{1}{s^2+1})$$

از آنجا که $y(0)=y'(0)=0$ پس داریم:

$$s^2Y(s)+sY(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{sY(s)}{s^2+1}\Rightarrow Y(s)(s^2+s)=(\frac{s}{s^2+1})(1+Y(s))$$

$$\Rightarrow Y(s)(1+s)=\frac{1+Y(s)}{s^2+1}\Rightarrow Y(s)(1+s)(s^2+1)-Y(s)=1$$

$$\Rightarrow Y(s)((1+s)(s^2+1)-1)=1\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^3+s^3+s}=\frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

برای به‌دست آوردن $y(t)$ باید لاپلاس معکوس بگیریم:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+s+1)}=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$

$$y(t)=1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}=1-e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2})$$

ترم دوم ۸۲-۱۳۸۱

سؤال در صفحه ۷

۱- برای به‌دست آورد عامل انتگرال‌ساز داریم:

$$g(x)=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-Q}=\frac{(1+4xy)-(2+6xy)}{-(x+2x^2y)}=\frac{-2xy-1}{x(-1-2xy)}=\frac{1}{x}$$

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

پس عامل انتگرال‌ساز را در معادله‌ی داده شده ضرب می‌کنیم تا به معادله‌ی کامل تبدیل شده و آن را حل می‌کنیم:

$$(2xy+3x^2y^2)dx+(x^2+2x^3y)dy=0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy+3x^2y^2\Rightarrow f(x,y)=x^2y+x^3y^2+h(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2+2x^3y+h'(y)\quad(*)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی (*) و $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2+2x^3y$ داریم:

$$h'(y)=0\Rightarrow h(y)=k\ \ (\text{ثابت})\Rightarrow f(x,y)=x^2y+x^3y^2+k$$

پس جواب معادله به صورت زیر است:

$$x^2y+x^3y^2=c$$

-۲

$$y'\sin y=(1-x\cos y)\cos y$$

با تغییر متغیر $\cos y=u$ ز و $-\frac{dy}{dx}\sin y=\frac{du}{dx}$ در مسئله داریم:

$$-\frac{du}{dx}=(1-xu)u\Rightarrow\frac{du}{dx}+u=xu^2\quad(*)$$

معادله‌ی به‌دست آمده یک معادله‌ی برنولی است که با تغییر متغیر $t=u^{-1}$ به معادله‌ی خطی تبدیل می‌شود:

$$t=u^{-1}\quad,\quad\frac{dt}{dx}=-1u^{-2}\frac{du}{dx}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی (*) در $-u^{-2}$ و جایگذاری $t=u^{-1}$ داریم:

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}-u^{-1}=-x\Rightarrow\frac{dt}{dx}-t=-x$$

حال جواب معادله‌ی خطی از مرتبه‌ی اول را به‌دست می‌آوریم:

$$\mu=e^{\int-dx}=e^{-x}\Rightarrow t(x)=\frac{1}{e^{-x}}\left[\int-xe^{-x}dx+c\right]$$

$$\Rightarrow t(x)=e^x\left[-(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx)+c\right]=e^x\left[xe^{-x}+e^{-x}+c\right]$$

$$t(x)=x+1+ce^x\xrightarrow{t=u^{-1}}y=\frac{1}{x+1+ce^x}\xrightarrow{u=\cos y}\cos y=\frac{1}{x+1+ce^x}$$

۳- ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن وابسته به آن را به‌دست می‌آوریم:

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow (D^2 - 5D + 6)y = 0 \Rightarrow (D-3)(D-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = 3 \Rightarrow y_1 = e^{3x} \\ D = 2 \Rightarrow y_2 = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

حال به کمک سمت راست معادله‌ی ناهمگن داده شده yp را محاسبه می‌کنیم:

$$y_P = A\sin 4x + B\cos 4x \quad , \quad y'_P = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x \quad , \quad y''_P = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x$$

با جایگذاری y_P در رابطه‌ی $y'' - 5y' + 6y = \sin 4x$ داریم:

$$-16A\sin 4x - 16B\cos 4x - 20A\cos 4x + 20B\sin 4x + 6A\sin 4x + 6B\cos 4x = 0$$

$$\sin 4x(-16A + 20B + 6A) + \cos 4x(-16B - 20A + 6B) = \sin 4x$$

$$\begin{cases} -10A + 20B = 1 \\ -10B - 20A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10A + 20B = 1 \\ -20B - 40A = 0 \end{cases} \Rightarrow -50A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{50} \quad , \quad B = \frac{2}{50}$$

$$\Rightarrow y_P = -\frac{1}{50}\sin 4x + \frac{2}{50}\cos 4x$$

۴-

$$y = \frac{c}{1 - \sin x} \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} y' = \frac{c\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = y\frac{\cos x}{(1 - \sin x)} \xrightarrow{\text{جایگذاری } y' \text{ با } -\frac{1}{y}} -\frac{1}{y'} = y\frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$-\frac{dx}{dy} = y\frac{\cos x}{1 - \sin x} \Rightarrow \frac{(\sin x - 1)}{\cos x}dx = ydy \Rightarrow (\tan x - \sec x)dx = ydy$$

$$-\ln|\cos x| - \ln|\sec x + \tan x| = \frac{y^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \ln|\cos x(\sec x + \tan x)| = -\frac{y^2}{2} - c$$

$$\Rightarrow \ln|1 + \sin x| = -\frac{y^2}{2} + c \Rightarrow \ln|1 + \sin x| + \frac{y^2}{2} = c :$$ معادله‌ی مسیرهای قائم

۵- با تغییر متغیر $u = \ln x$ و رابطه‌ی $x^n D^n(y(x)) = D(D-1)\cdots(D-n+1)y(u)$ داریم:

$$D(D-1)y(u) + 2Dy(u) + y = 0 \Rightarrow (D^2 + D + 1)y \Rightarrow y'' + y' + y = 0$$

به کمک معادله‌ی مشخصه جواب عمومی معادله‌ی همگن را محاسبه می‌کنیم.

$$(D^2 + D + 1) = 0 \Rightarrow D = \frac{-1 \pm 3i}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-\frac{1}{2}u}\cos\frac{3}{2}u \\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}u}\sin\frac{3}{2}u \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}u}(c_1\cos\frac{3}{2}u + c_2\sin\frac{3}{2}u) \xrightarrow{u = \ln x} y = \frac{1}{\sqrt{x}}(c_1\cos\frac{3}{2}\ln x + c_2\sin\frac{3}{2}\ln x)$$

۶- الف)

$$L\left[\int_0^t e^{2x}\cosh 5x dx\right]=L\left[\int_0^t e^{2x}\times\frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2}dx\right]$$

$$=L\left[\int_0^t\frac{e^{7x}+e^{-3x}}{2}dx\right]=L\left[\frac{1}{14}e^{7x}-\frac{1}{6}e^{-3x}\Big|_0^t\right]$$

$$=L\left[\frac{1}{14}e^{7t}-\frac{1}{6}e^{-3t}-\frac{2}{21}\right]=\frac{1}{14}\times\frac{1}{s-7}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{s+3}-\frac{2}{21}\times\frac{1}{s}$$

ب) با توجه به تعریف تابع پله‌ای واحد داریم:

$$u(x+3)=u_{-3}(x)$$

$$\Rightarrow L\left[x^2u(x+3)\right]=L\left[x^2u_{-3}(x)\right]=e^{3s}L\left[(x-3)^2\right]$$

$$=e^{3s}L\left[x^2-6x+9\right]=e^{3s}\left(\frac{2}{s^3}-\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right)$$

-۷

$$L[f(t)]=L\left[2t^2\right]+L\left[\int_0^t\sin(4u)f(t-u)du\right]$$

$$L[f(t)]=L\left[2t^2\right]+L[(\sin 4t)*f(t)]=L\left[2t^2\right]+L[\sin 4t].L[f(t)]$$

$$\Rightarrow L[f(t)]=(1-L[\sin 4t])=L\left[2t^2\right]\Rightarrow L[f(t)](1-\frac{4}{s^2+16})=\frac{4}{s^3}$$

$$\Rightarrow L[f(t)]=\frac{\frac{4}{s^3}}{\frac{s^2+12}{s^2+16}}=\frac{4(s^2+16)}{s^3(s^2+12)}$$

$$L^{-1}\left[L[f(x)]\right]=4L^{-1}\left[\frac{s^2+12}{s^3(s^2+12)}+\frac{4}{s^3(s^2+12)}\right]=4L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}+\frac{\frac{-1}{36}s^2+\frac{1}{3}}{s^3}+\frac{\frac{1}{36}s}{s^2+12}\right]$$

$$\Rightarrow f(t)=4L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}-\frac{1}{36}\times\frac{1}{s}+\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{36}\frac{s}{s^2+12}\right]$$

$$\Rightarrow f(t)=4\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{36}+\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{36}\cos\sqrt{12}\right)=\frac{8}{3}t^2-\frac{1}{9}+\frac{1}{36}\cos\sqrt{12}$$

Iran Micro

www.Iran-Micro.com

انجمن برق و الکترونیک

مجلات معتبر برق و الکترونیک

دانلود دیتاشیت قطعات پرکاربرد

دانلود مقالات برق و الکترونیک

مقالات و کنفرانس های IEEE

نرم افزار های کاربردی برق و الکترونیک

پروژه های الکترونیکی آماده به همراه منابع

انواع کتاب های زبان اصلی و جزوات درسی

منابع کنکور کاردانی به کارشناسی و کارشناسی ارشد