حل مسائل آزمون میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۵-۹۴

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ ب) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log_3 n}$

حل. الف) با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ ، سری فوق شرط لازم همگرایی را ندارد. پس واگرا است. (۵نمره)

ب) توابع $f(x) = x$ و $g(x) = \log_3 x$ صعودی و در نتیجه حاصل ضربشان صعودی است. پس

$$\forall n \geq 2, \quad n \log_3 n \leq (n+1) \log_3 (n+1)$$

و از آنجا $\frac{1}{n \log_3 n} \leq \frac{1}{(n+1)\log_3(n+1)}$. یعنی دنبالهٔ $\{\frac{1}{n \log_3 n}\}$ دنباله‌ای نزولی است. همچنین، چون $\lim_{n\to\infty} n \log_3 n = \infty$، خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \log_3 n} = 0$. در نتیجه بنابر آزمون لایب‌نیتس، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log_3 n}$ همگرا است. (۵ نمره)

---

۲. مقادیر $p > 0$ را چنان تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3n^p + 1} - \sqrt{3n^p - 3})$ همگرا باشد.

حل. قرار می‌دهیم $a_n = \sqrt{3n^p + 1} - \sqrt{3n^p - 3}$. با ضرب کردن صورت و مخرج a_n در مزدوج آن، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{4}{\sqrt{3n^p + 1} + \sqrt{3n^p - 3}} = \frac{4}{n^{\frac{p}{2}} \left(\sqrt{3 + \frac{1}{n^p}} + \sqrt{3 - \frac{3}{n^p}}\right)}$$

اگر قرار دهیم $b_n = \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی، هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ از بابت همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ برای $0 < p \leq 2$ واگرا و برای $p > 2$ همگرا است. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز برای مقادیر $0 < p \leq 2$ واگرا و برای $p > 2$ همگرا است. (۵ نمره)

۳. نشان دهید تابع f با ضابطهٔ زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}(e^x-1)\ln x & x>0\\ 0 & x=0\\ |x|^{\cos x} & x<0\end{cases}$$

حل. برای نقطهٔ دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_0>0$. در این حالت با توجه به پیوستگی هر یک از توابع (e^x-1) و $\ln x$ در این نقطه، تابع $(e^x-1)\ln x$ نیز در این نقطه پیوسته خواهد بود. (۳ نمره)

ب) $x_0<0$. در این حالت با توجه به پیوستگی هر یک از توابع $\cos x$ و $\ln|x|$ در این نقطه، تابع $\cos x\ln|x|$ نیز در این نقطه پیوسته است. با استفاده از پیوستگی تابع $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع $\exp(\cos x\ln|x|)=|x|^{\cos x}$ نیز در این نقطه پیوسته است. (۴ نمره)

ج) $x_0=0$. در این حالت نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}|x|^{\cos x}=\lim_{x\to 0^-}e^{\cos x\ln|x|}$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to 0^-}\cos x=1$ و $\lim_{x\to 0^-}\ln|x|=-\infty$ داریم $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x\ln|x|=-\infty$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)\ln x=\lim_{x\to 0^+}(\frac{e^x-1}{x})x\ln x$$

بنابر مثال‌های حل شده، $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (این عبارت برابر مشتق راست تابع نمایی در نقطه $x=0$ است). همچنین $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\times 0=0$.

به این ترتیب، تابع f در $x_0=0$ نیز پیوسته و در نتیجه بر سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است. (۸ نمره)

---

۴. نشان دهید عدد مثبت c وجود دارد که $2^c=c^3$.

حل. تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۲^x - x^۳ = e^{x\ln ۲} - x^۳$ تفاضل دو تابع پیوسته و در نتیجه تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ است. داریم

$$f(۰) = ۲^۰ - ۰ = ۱ > ۰ \quad \text{و} \quad f(۲) = ۲^۲ - ۲^۳ = -۴ < ۰$$

پس بنابر قضیهٔ بولتسانو، $c \in (۰, ۲)$ وجود دارد که $f(c) = ۲^c - c^۳ = ۰$. (۱۰ نمره)

---

۵. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^۲ \tanh(\frac{۱}{x}) & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$.

الف) ضابطه f' را به دست آورید.

ب) پیوستگی f' در $x = ۰$ را بررسی کنید.

حل. الف) برای $x \neq ۰$، با استفاده از مشتق تابع مرکب، خواهیم داشت

$$f'(x) = ۲x\tanh(\frac{۱}{x}) + x^۲\big(-\frac{۱}{x^۲}\big)\big(۱ - \tanh^۲(\frac{۱}{x})\big) = ۲x\tanh(\frac{۱}{x}) + \tanh^۲(\frac{۱}{x}) - ۱$$

برای $x = ۰$ با استفاده از تعریف و توجه به اینکه تابع tanh تابعی کراندار بر $\mathbb{R}$ است خواهیم داشت

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰} x\tanh(\frac{۱}{x}) = ۰$$

پس $f'(x) = \begin{cases} ۲x\tanh(\frac{۱}{x}) + \tanh^۲(\frac{۱}{x}) - ۱ & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$. (۱۲ نمره)

ب) با توجه به اینکه $\lim_{x\to\infty} \tanh x = ۱$ و $\lim_{x\to -\infty} \tanh x = -۱$، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۰^+} f'(x) &= \lim_{x\to ۰^+} \big(۲x\tanh(\frac{۱}{x}) + \tanh^۲(\frac{۱}{x}) - ۱\big) = ۰ + (۱)^۲ - ۱ = ۰ \\ \lim_{x\to ۰^-} f'(x) &= \lim_{x\to ۰^-} \big(۲x\tanh(\frac{۱}{x}) + \tanh^۲(\frac{۱}{x}) - ۱\big) = ۰ + (-۱)^۲ - ۱ = ۰ \end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{x\to ۰} f'(x) = ۰ = f'(۰)$. پس تابع مشتق در $x = ۰$ پیوسته است. (۸نمره)