پاسخ آزمون میان ترم ریاضی عمومی یک
آبان ماه ۱۳۹۶

---

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.(۱۵ نمره)

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\cosh n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{e^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

حل: الف) می دانیم $\frac{n^3}{\cosh n}$ همواره مثبت است پس می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. داریم

$$\cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \geq \frac{e^n}{2} \geq \frac{n^5}{2 \times 5!}.$$

بنابراین

$$\frac{n^3}{\cosh n} \leq (2 \times 5!)\frac{n^3}{n^5} = \frac{240}{n^2}.$$

چون سری $240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{240}{n^2}$ همگراست. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$ نیز همگراست.

ب) چون $n > 0$ پس $\tanh n$ مثبت است و می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. با توجه به این که $\tanh n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \leq 1$ خواهیم داشت

$$\frac{\tanh n}{e^n} \leq \frac{1}{e^n}.$$

اما سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{e}$ است که $0 < \frac{1}{e} < 1$ و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{e^n}$ نیز همگراست.

ج) واضح است که $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ همواره مثبت است، پس می‌توان از آزمون ریشه استفاده کرد. داریم

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

اما طبق مثال حل شده دنباله $(1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ همگرا به عدد e است که $2 < e < 3$. پس دنباله $(\frac{n}{n+1})^n$ همگرا به عدد $\frac{1}{e}$ است که $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$. پس طبق آزمون ریشه سری همگرا است.

راه دوم (استفاده از آزمون مقایسه). طبق مثال حل شده، دنباله $(\frac{n+۱}{n})^n = (۱+\frac{۱}{n})^n$ یک دنباله صعودی است. پس همه جملات از جمله اول بزرگتر یا مساوی است. پس

$$(\frac{n+۱}{n})^n \geq (\frac{۲}{۱})^۱ = ۲.$$

بنابراین

$$\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲} = \left((\frac{n}{n+۱})^n\right)^n \leq (\frac{۱}{۲})^n.$$

اما سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^n$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ است و لذا همگرا است. پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ نیز همگراست.

---

۲. به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲x+۴)^n}{۵^n(n+۵)}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط و یا واگرا است؟(۱۵ نمره)

حل.

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲x+۴)^n}{۵^n(n+۵)} = \sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۲}{۵})^n\frac{(x+۲)^n}{n+۵}$$

$$\lim\frac{|(\frac{۲}{۵})^{n+۱}\frac{(x+۲)^{n+۱}}{(n+۶)}|}{|(\frac{۲}{۵})^n\frac{(x+۲)^n}{(n+۵)}|} = \lim\frac{۲(n+۵)}{۵(n+۶)}|x+۲| = \frac{۲}{۵}|x+۲|$$

پس برای $\frac{۲}{۵}|x+۲| < ۱$، یعنی $x \in (-\frac{۹}{۲}, \frac{۱}{۲})$، بنابر آزمون نسبت، سری فوق همگرای مطلق است. (۷ نمره)

به ازای $x = \frac{۱}{۲}$، سری همان سری همساز $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n+۵} = \sum_{n=۵}^{\infty}\frac{۱}{n}$ و در این حالت سری واگرا است. (۲ نمره)

به ازای $x = -\frac{۹}{۲}$ سری به شکل $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۵}$ است. در این حالت، از این که $\{\frac{۱}{n+۵}\}$ دنباله‌ای مثبت، نزولی و همگرا به صفر است، طبق آزمون لایبنیتس سری همگرای مشروط است (در این حالت همگرای مطلق نیست). (۲ نمره)

برای $x > ۵$ یا $x < ۱$، یعنی $\frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$ نشان می‌دهیم سری واگراست. برای این منظور کافی است نشان دهیم جمله‌ی عمومی سری به صفر همگرا نیست. داریم $a_n := |(\frac{۲}{۵})^n \frac{(x+۲)^n}{n+۵}| > ۰$ و

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{۲(n+۵)}{۵(n+۶)}|x+۲| = \frac{۲}{۵}|x+۲| > ۱$$

به این ترتیب از یک اندیس $N_۰$ به بعد داریم $a_{n+۱} > a_n$ و در نتیجه برای هر $n > N_۰$، $a_n > a_{N_۰} > ۰$. پس $\lim a_n \geq a_{N_۰} > ۰$. در نتیجه در این حالت سری واگرا است. (۴ نمره)

---

۳. نشان دهید $c \in (۰, \infty)$ وجود دارد به طوری که $۲^c = c^c \ln c$. (۱۰ نمره)

حل. با استفاده از قضیه بولزانو وجود c را ثابت می‌کنیم. ابتدا تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = ۲^x - x^x \ln(x) = e^{x \ln ۲} - e^{x \ln(x)} \ln(x)$$

دامنه f بازه $(۰, \infty)$ است و تابع روی دامنه خود پیوسته است زیرا توابع $\ln$ و نمایی هر دو پیوسته هستند. در نتیجه تابع f روی بازه بسته $[۱, e]$ پیوسته است. همچنین داریم

$$f(۱) = ۲ > ۰ \quad , \quad f(e) = ۲^e - e^e < ۰.$$

بنابراین بنا به قضیه بولزانو c در $(۱, e)$ وجود دارد که

$$f(c) = ۰.$$

یعنی $c \in (۰, \infty)$ بدست آوردیم که $۲^c = c^c \ln c$.

---

۴. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ \sin(۱/x)}{e^x - ۱} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ مفروض است. (۲۰ نمره)

الف) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f را در صفر بررسی کنید.

ب) ضابطه‌ی مشتق f را در نقاطی تعیین کنید که تابع مشتق‌پذیر است.

حل. الف) برای بررسی پیوستگی تابع f در $x=۰$، عبارت $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^۲ \sin(\frac{۱}{x})}{e^x - ۱} = x\sin(\frac{۱}{x})\frac{x}{e^x-۱}$$

اگر قرار دهیم $g(x)=e^x$ آنگاه $\lim_{x\to ۰} \frac{e^x-۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{g(x)-g(۰)}{x-۰} = g'(۰)$. در نتیجه با توجه به اینکه $g'(x)=e^x$ خواهیم داشت $\lim_{x\to ۰} \frac{e^x-۱}{x} = g'(۰) = ۱$ و در نتیجه $\lim_{x\to ۰} \frac{x}{e^x-۱} = ۱$. در عین حال با توجه به کرانداری $\sin(\frac{۱}{x})$ داریم $\lim_{x\to ۰} x\sin(\frac{۱}{x}) = ۰$. بنابر این

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} x\sin(\frac{۱}{x})\frac{x}{e^x-۱} = ۰\times ۱ = ۰ = f(۰)$$

پس f در $x=۰$ پیوسته است.
برای بررسی مشتق‌پذیری f در $x=۰$، به بررسی $\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} &= \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{x^۲\sin(\frac{۱}{x})}{e^x-۱}}{x} \\ &= \lim_{x\to ۰} \frac{x\sin(\frac{۱}{x})}{e^x-۱} \\ &= \lim_{x\to ۰} \sin(\frac{۱}{x})\frac{x}{e^x-۱}\end{aligned}$$

بنابر آنچه در قسمت قبل بیان کردیم $\lim_{x\to ۰} \frac{x}{e^x-۱} = ۱$. همچنین می‌دانیم $\lim_{x\to ۰} \sin(\frac{۱}{x})$ وجود ندارد. پس حد فوق وجود نخواهد داشت. یعنی تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.
ب) برای هر $x\neq ۰$، با توجه به مشتق‌پذیری هر یک از عبارات $\sin(\frac{۱}{x})$، $x^۲$ و $e^x-۱$، و اینکه برای $x\neq ۰$، $e^x-۱\neq ۰$، بنابر قضایای بیان شده، تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر است. داریم

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(۲x\sin(\frac{۱}{x}) + x^۲(-\frac{۱}{x^۲})\cos(\frac{۱}{x}))(e^x-۱) - (x^۲\sin(\frac{۱}{x}))(e^x)}{(e^x-۱)^۲} \\ &= \frac{(۲x\sin(\frac{۱}{x}) - \cos(\frac{۱}{x}))(e^x-۱) - (x^۲\sin(\frac{۱}{x}))(e^x)}{(e^x-۱)^۲}\end{aligned}$$