دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی صنایع

مسئله کوتاه ترین مسیر

حسین کریمی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی صنایع

سوال؟؟

کوتاه ترین مسیر برای رفتن از نقطه A به نقطه B چیست؟

اگر برخی از مسیرها یک طرفه باشند، آنگاه مسئله چطور خواهد شد؟

مقدمه

این مسئله یکی از مهم‌ترین و پایه‌ای‌ترین مسائل موجود در شبکه‌های حمل و نقلی است. از دلایل اهمیت مطالعه این مسئله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- متناوبا در مسائل حمل و نقلی تکرار می‌شود و به عنوان یک زیر مسئله در الگوریتم‌های سطح بالا است.
- به راحتی و با عملکرد خوبی قابل حل است.
- ویژگی‌های ضروری مدل‌های جریان شبکه را دارا می‌باشد.
- نقطه آغازی برای آشنایی با طراحی الگوریتم مناسب برای مسائل حمل و نقلی است.

مقدمه

همانطور که از نام این موضوع پیداست، مسئله هنگامی ایجاد می‌شود که نیاز به یافتن ارزان‌ترین، کوتاه‌ترین و یا قابل اعتمادترین مسیر برای انتقال جریان بین نقاط وجود داشته باشد.

مسئله کوتاه‌ترین مسیر به سه نوع مختلفی که در ادامه بیان می‌شود، تقسیم می‌گردد.

- یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه؛
- یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین یک نقطه و باقی نقاط؛
- یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین همه نقاط با هم.

هر کدام از این سه نوع مسئله، با توجه به مقادیر کمان‌های موجود در شبکه می‌تواند به دو طبقه زیر تقسیم شوند.

- مقادیر کمان‌ها نامنفی باشند.
- محدودیتی برای مقادیر کمان‌ها موجود نیست.

کاربردهای مسئله کوتاه‌ترین مسیر

شبکه‌های کامپیوتری.

شبکه ارتباطی برای انتقال داده‌ها شامل رایانه‌ها و پیوندهای ارتباطی هستند که بیت‌های اطلاعاتی را از مبادی به مقصدهایشان ارسال می‌کنند. برای انتقال این جریان داده از مسئله کوتاه‌ترین مسیر استفاده می‌شود.

کنترل پروژه.

عموما مدیران پروژه به دنبال این موضوع هستند که کم‌ترین زمان پایان پروژه چقدر است. با در نظر گرفتن شروع و پایان فعالیت‌ها به عنوان یک گره و زمان انجام فعالیت‌ها به عنوان یک کمان، می‌توان گرافی را ایجاد کرد. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین زمان پایان پروژه باید مسئله کوتاه‌ترین مسیر را بین نقطه شروع و نقطه پایان پروژه حل کرد. این مسئله نیز دارای محدودیت‌های همانند پیش‌نیازی فعالیت‌ها و یا ظرفیت منابع می‌باشد.

کاربردهای مسئله کوتاه‌ترین مسیر

برنامه‌ریزی پویا.

اگر در برنامه‌ریزی پویا هر وضعیت را یک گره و مسیر بین یک وضعیت در یک مرحله و وضعیت دیگر در مرحله بعد را کمان در نظر بگیرید، آنگاه گرافی خواهید داشت که برای رفتن از مرحله اول به مرحله آخر، می‌توان کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کرد تا مسئله در زمان کمتری حل شود.

کاربردهای دیگر

حرکت روبات ها

تنظیم نوشتار در TeX ها

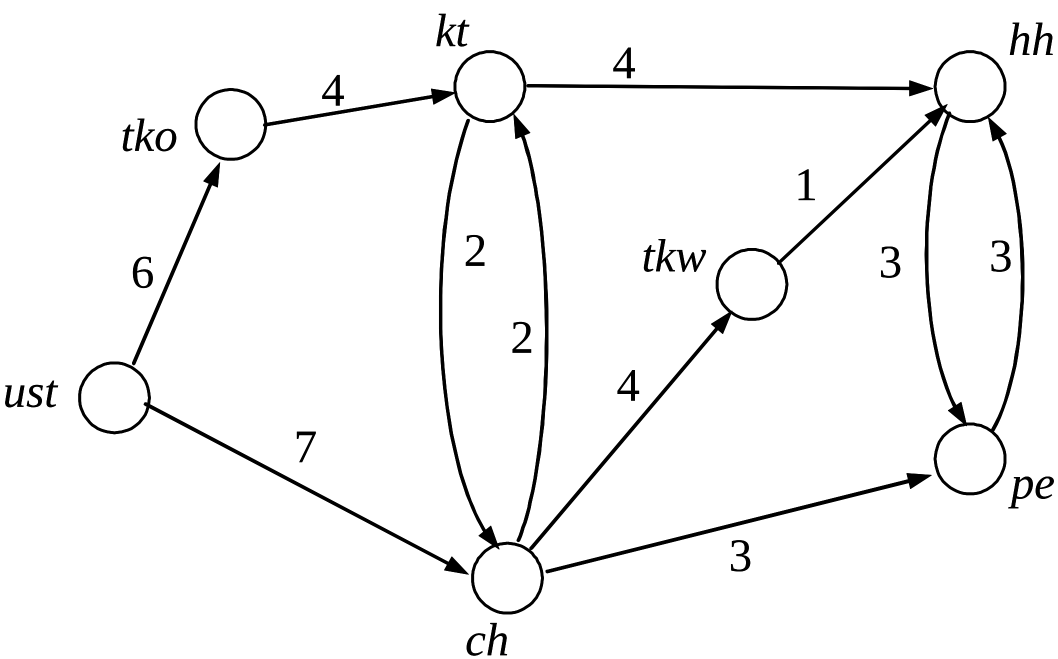
برنامه ریزی ترافیک شهری

لوله کشی ها

تقریب تابع قطعه قطعه خطی

تعریف مسئله

یک گراف جهت دار وزن دار داده شده است، G(N,A)، از گره s مسیر باید شروع شود و به t ختم شود، کوتاه ترین مسیر وزن دار بین این دو گره کدام است؟



مدل ریاضی

$$\min \sum_{(i,j)\in A} a_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j:(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{j:(j,s)\in A} x_{js} = 1$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 0 \quad i \in N \setminus s,t$$

$$\sum_{j:(t,j)\in A} x_{tj} - \sum_{j:(j,t)\in A} x_{jt} = -1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$

مدل ریاضی آزاد شده خطی

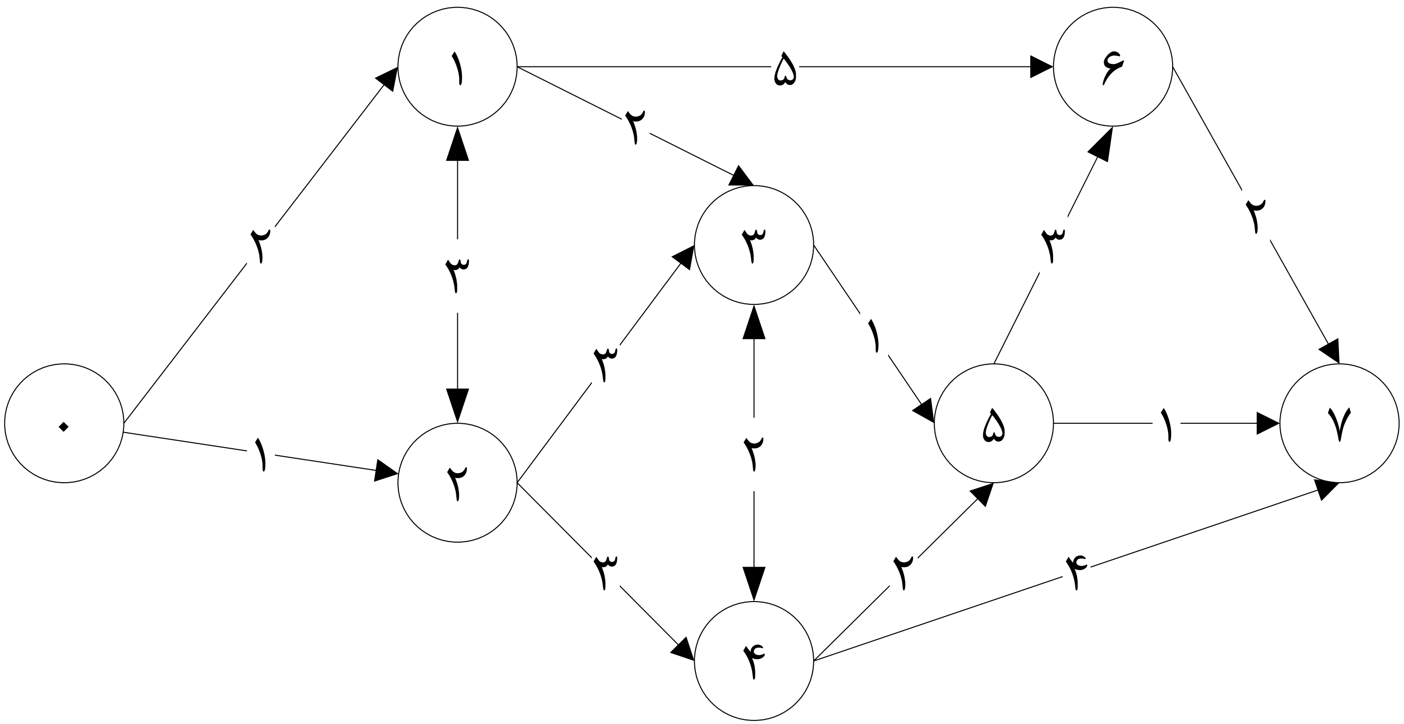
به دلیل این که ضرایب فنی محدودیت‌ها یک ماتریس تک کالبدی کامل (Totally Unimodular Matrix) است (قضیه هافمن و کروسکال (۱۹۵۶)). جواب آزادسازی خطی آن با جواب اصلی مسئله برابر است.

پس می‌توان محدودیت $x_{ij} \in \{0,1\}$ را می توان به $x_{ij} \geq 0$ تبدیل کرد.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی صنایع

مثال

مدل ریاضی کوتاه ترین مسیر بین گره صفر و هفت را بنویسید.



حل مثال

$$\min \quad 2x_{01}+x_{02}+3x_{12}+2x_{13}+5x_{16}+3x_{21}+3x_{23}+3x_{24}+2x_{34}+x_{35}+2x_{43}+2x_{45}+$$
$$4x_{47}+3x_{56}+x_{57}+2x_{67}$$

$$x_{01}+x_{02}=1;$$

$$x_{12}+x_{13}+x_{16}-x_{01}-x_{21}=0; \quad x_{21}+x_{23}+x_{24}-x_{02}-x_{12}=0;$$

$$x_{34}+x_{35}-x_{13}-x_{23}-x_{43}=0; \quad x_{43}+x_{45}+x_{47}-x_{24}-x_{34}=0;$$

$$x_{57}+x_{56}-x_{35}-x_{45}=0; \quad x_{67}-x_{16}-x_{56}=0;$$

$$-x_{47}-x_{57}-x_{67}=-1$$

$$x_{01},x_{02},x_{12},x_{13},x_{16},x_{21},x_{23},x_{24},x_{34},x_{35},x_{43},x_{45},x_{47},x_{56},x_{57},x_{67}\in\{0,1\}$$

جواب مدل ریاضی مطرح شده برای مثال به صورت زیر است و مقدار تابع هدف برابر ۶ خواهد شد.

$$x_{01}=1, \quad x_{13}=1, \quad x_{35}=1, \quad x_{57}=1$$

سوال

- ✓ سوال : به نظر شما، آیا جواب بیان شده، تنهـا جـواب مسـئله اسـت؟ اگـر جواب‌های دیگری وجود دارد، آن‌ها را بیابید.
- ✓ سوال: تعداد محدودیت‌های فعال در مسئله کوتاه‌ترین مسیر چقدر است؟

بهبود مدل سازی

از آن‌جا که رتبه ماتریس ضرایب تکنولوژی برابر تعداد محدودیت‌ها نمی‌باشد و یک واحد از آن کمتر است، می‌توان محدودیت آخر مسئله را بدون هیچ تغییری در مقدار جواب مسئله حذف کرد. در واقع بدون وجود این محدودیت، مسئله دارای همان مقدار جواب خواهد بود. با حذف این محدودیت و جمع کردن محدودیت اول با تمامی محدودیتهای دیگر، مدل زیر ایجاد خواهد شد.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} a_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 1 \quad i \in N \setminus t$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$

الگوریتمهای حل

- الگوریتم دایجکسترا
- الگوریتم اولیه-ثانویه
- الگوریتم جانسون
- الگوریتم بلمن – فورد
- الگوریتم فلوید- وارشال

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

الگوریتم دایجکسترا

- روش دایجسترا به نام ارائه دهنده آن نام‌گذاری شده است (Dijkstra, 1959).
- این روش با منطق برچسب‌گذاری عمل می‌کند.
- این الگوریتم برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از یک گره، که گره ریشه نامیده می‌شود، به تمامی دیگر گره‌ها در یک شبکه جهت دار یا غیر جهت‌دار استفاده می شود.
- حاصل الگوریتم یک درخت گسترده خواهد بود که از گره ریشه منشعب شده و به بقیه گره‌ها، در صورت امکان، ارتباط پیدا می‌کند.
- این درخت، درخت کوتاه‌ترین مسیرهای گسترده شده یا کوتاه‌ترین مسیر درختی ریشه گرفته از یک گره مشخص نامیده میشود.

گام های الگوریتم دایجکسترا

مرحله آغازین: برای هر گره $u \in A \setminus s$، مقدار $d(u) = \infty$ قرار دهید و یک متغیر پرچم با نام $flag$ را تعریف کنید و $flag(u) = 0$ قرار دهید. پیش‌نیاز تمامی این گره‌ها را تهی قرار دهید (یعنی $pred(u) = \phi$). برای گره آغازین $d(s) = 0$، $flag(s) = 0$ و $pred(s) = \phi$. صـــفی از تمامی گره‌هایی که $flag = 0$ را در مجموعه Q قرار دهید.

مرحله تکراری: گام‌های زیر را تا هنگامی که مجموعه $Q \neq \phi$ یا $t \in Q$ (t گره مقصد است) انجام دهید.

۱) در گره‌های $u \in Q$ گرهی که کمترین مقدار $d(u)$ را دارد بدست آورید و $index$ بنامید.

۲) برای هر گره v که از $index$ به آن کمان مستقیم است، مراحل زیر را انجام دهید.

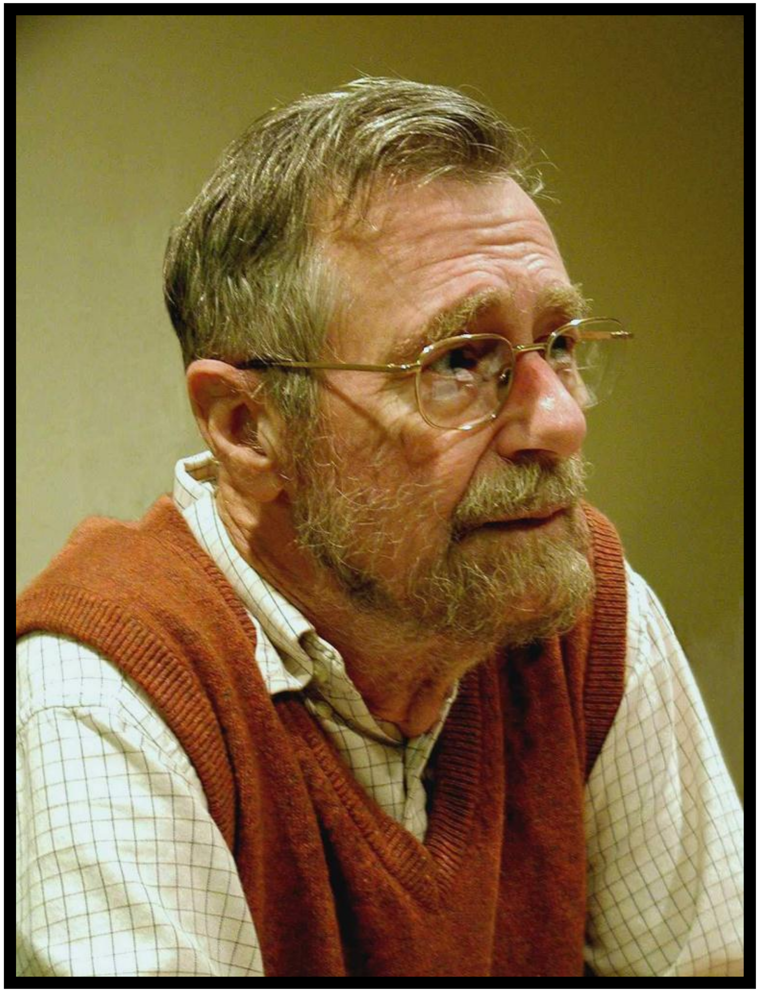
I. $flag(index) = 1$

II. $Q = Q \setminus index$

III. اگر $d(index) = \infty$ آن‌گاه مسئله نشدنی است و از حل خارج شوید.

IV. اگر $d(index) + a(index, v) < d(v)$ آنگاه $d(v) = d(index) + a(index, v)$ و $pred(v) = index$.

Prof Edsger Dijkstra [1930-2002]



عیب الگوریتم دایجکسترا

هنگامی که وزن ها منفی باشد، قابل استفاده نیست.