# فصل اول

# تـــابـــع

تمرین صفحه 42

(1) دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

حل: $D_f=R\ x^2+1\geq 0 \quad \Rightarrow$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+21}}$

حل: $x^2-5x+21=x^2-5x+\dfrac{25}{4}+\dfrac{59}{4}=(x-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{59}{4}>0\Rightarrow D_f=R$

3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

حل: $D_f=(0,+\infty)$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$ $\quad x^2-7x+12=0\Rightarrow x_1=4, x_2=3$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+2}}\Rightarrow x^2-x+2=x^2-x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4}$

$=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{7}{4}>0\Rightarrow D_f=R$

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}\Rightarrow D_f=R-\{0\}$

7) $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^2+2x+1)(-x^2+x-1)}{x^2-5x+6}}$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{(x+1)^2(-x^2+x-1)}{(x-2)(x-3)}}$$

$(x+1)^2 \geq 0 \quad , \quad -x^2+x-1<0 \quad \Rightarrow$ صورت کسر $\leq 0$

باید مخرج کسر همراه منفی باشد و مخالف صفر یعنی $2<x<3$.

$\Rightarrow D_f=(2,3)$

9) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-5+6} \quad \Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

10) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} \quad \Rightarrow D_f=R-\{-1\}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \quad \Rightarrow x\neq|x| \Rightarrow x<0 \quad \Rightarrow D_f=(-\infty,0)$

12) $f(x)=\sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow D_f=[-1,1]$

2) دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید:

1) $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases} \quad \Rightarrow D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$R_f=\{-1,1\}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x} \quad \Rightarrow D_f=R-\{0\}$

$\Rightarrow x\in D_f \Rightarrow f(x)=x \Rightarrow R_f=R-\{0\}$

3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1} \quad \Rightarrow D_f=R-\{1\}, R_f=\{1\}$

4) $f(x)=\{-x+3 \quad x>1 \quad \Rightarrow D_f=(-\infty,+\infty)$

چون تابع روی $[-\infty,1]$ صعودی است برد در این قسمت برابر $[-\infty,1]$ است و

و چون تابع روی $(1,+\infty)$ نزولی است برد در این قسمت برابر

$(-\infty,-1+3)=(-\infty,2)$

است. پس برد تابع اجتماع این دو مجموعه است که برابر مجموعه زیر است:

$$R_f=(-\infty,2)$$

$$5)\quad f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ x+1 & x>1 \end{cases} \Rightarrow D_f=R-\{1\}$$

$$R_f=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$$

$$6)\quad f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{2\}$$

$$\Rightarrow x\in D_f \Rightarrow f(x)=x+2$$

$$R_f=R-\{4\}$$

$$7)\quad f(x)=\begin{cases} -x+5 & x>4 \\ -\sqrt{16-x^2} & -4<x<4 \\ x+5 & x\le -4 \end{cases} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{4\}$$

$$f_1=-x+5 \quad , \quad x>4 \quad \Rightarrow R_{f_1}=(-\infty,1)$$

$$f_1=-\sqrt{16-x^2} \qquad -4<x<4 \Rightarrow R_f=[-4,0]$$

$$f_3=x+5 \qquad x\le -4 \Rightarrow R_f=[0-\infty,1]$$

$$\Rightarrow R_f=R_{f_1}\cup R_{f_2}\cup R_{f_3}=(-\infty,1)U[-4,0]=(-\infty,1)$$

$$8)\quad f(x)=\sqrt{x-|x|}$$

چون همواره داریم $x\le|x|$ در نتیجه $x-|x|\le 0$ پس جاهایی که $|x|=x$ است قابل قبول است یعنی $D_f=[0,+\infty]$.

$$x\in D_f \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-x}=0 \qquad \Rightarrow R_f=\{0\}$$

3) از جفت توابع زیر کدام یک مساوی هستند؟

1) $f(x)=\frac{x}{x}, g(x)=1$

مساوی نیستند چون $D_g=R$ و $D_f=R-\{0\}$ با هم برابر نیستند.

2) $g(x)=x$ و $f(x)=(\sqrt{x})^2$

مساوی نیستند چون $D_g=R$ و $D_f=[0,+\infty)$ با هم برابر نیستند.

3) $g(x)=x+2$ و $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ با هم برابر نیستند.

4) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-1}$ مطلوب است. $f(1)$ ، $f(x+1)$ و $f(x^2-1)$ و $f(f(2))$.

$f(1)=\sqrt{1-1}=0$

$f(x+1)=\sqrt{x+1-1}=\sqrt{x}$

$f(\frac{1}{x})=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$

$f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1-1}=\sqrt{x^2-2}$

$f(f(2))=f(\sqrt{2-1})=f(1)=0$

5) اگر f تابعی باشد که به ازای هر x و y. $f(x+y)=f(x)+f(y)$ .

اگر n عدد طبیعی باشد و $f(1)\neq 0$ باشد. مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ را بیابید.

حل :

$$f(n)=f(1+1+1+\ldots+1)=f(1)+f(1)+\ldots+f(1)$$
$$=n\ f(1)$$
$$\Rightarrow\ \frac{f(n)}{f(1)}=\frac{nf(1)}{f(1)}=n$$

6) در هر یک از موارد $f+g$ ، $\frac{f}{g}$ ، $fog$ ، $gof$ ، $fof$ ، $gog$ را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ , $g(n)=x^2+1$ .

$$f+g(x)=\sqrt{x}+x^2+1$$
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$
$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{x^2+1}$$
$$got(x)=g(f(x))=(\sqrt{x})^2+1=x+1$$
$$fof(x)=f(f(m))=\sqrt{\sqrt{x}}=^4\sqrt{x}$$
$$gog(x)=g(g(x))=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

ب) $g(x)=4-x^2$ , $f(x)=\sqrt{x}$

$$f+g(x)=\sqrt{x}+4-x^2$$
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{x}}{4-x^2}$$
$$fog(x)=\sqrt{4-x^2}$$
$$gof(x)=4-(\sqrt{x})^2=4-x$$
$$fof(x)=\sqrt{\sqrt{x}}=^4\sqrt{x}$$
$$gog(x)=4-(4-x^2)^2=4-(16-8x^2+x^4)=-4+8x^2-x^4$$

ج) $g(x)=\frac{1}{x}$ , $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

$$f+g(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}=\frac{x^2+x}{x-1}$$

$$gof(x)=f(g(x))=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$fog(x)=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x+1}{1-x}$$

$$fof(x)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}=\frac{x+2}{2}$$

$$gog(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

د) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ , $f(x)=x^2$.

$$f+g(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$gof(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{1}{|x|}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=x^2\sqrt{x}$$

$$fof(x)=(x^2)^2=x^4$$

$$gog(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}=\sqrt[4]{x}$$

$$fog(x)=f(g(n))=(\frac{1}{\sqrt{x}})^2=\frac{1}{x}$$

7) در هر مورد $fg$ و $f-g$ را بیابید.

الف) $g(x)=\begin{cases} x & x<o \\ 4 & x\geq o \end{cases}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} x^2 & x<o \\ 4 & x\geq o \end{cases},$

حل:

$$f-g(x)=\begin{cases} x^2-x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases} \qquad fg(x)=\begin{cases} x^3 & x<0 \\ 16 & x\geq 0 \end{cases}$$

ب) $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x & 0\leq x<1 \\ 4x & 1<x \end{cases}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & x\geq 0 \end{cases},$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & 0\leq x\leq 1 \\ 4 & 1<x \end{cases}$ می‌نویسیم، داریم:

$$fg(x)=\begin{cases} x^4 & x<0 \\ -4x & 0\leq x \\ 16x & 1<x \end{cases}$$

و $f-g(x)=\begin{cases} x^2-x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$

ب) $\qquad g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x & 0\leq x<1 \\ 4x & 1<x \end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & x\geq 0 \end{cases}$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & 0\le x\le 1 \\ 4 & 1<x \end{cases}$ می‌نویسیم، داریم:

$$fg(x)=\begin{cases} x^4 & x<0 \\ -4x & 0\le x<1 \\ 16x & 1<X \end{cases}$$

{S

ج)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ 4 & x\ge 1 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<-1 \\ x^2+1 & -1\le x<2 \\ \sqrt{x+2} & 2<x \end{cases}$$

حل: دامنه مشترک دو تابع برابر $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ است پس داریم:

$$f-g(x)=\begin{cases} x^2-1-\dfrac{1}{x} & x<-1 \\ 4-\sqrt{x+2} & x>2 \end{cases}$$

$$fg(x)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-1)}{x} & x<-1 \\ 4\sqrt{x+2} & x>2 \end{cases}$$

8) توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند.

$$f:R-\{3\}\to R \qquad\qquad g:R-\{1\}\to R$$

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}} \qquad\qquad g(x)=\frac{3-8x^3}{1-x^3}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1+3}{x_1-3}}=\sqrt[3]{\frac{x_2+3}{x_2-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+3}{x_1-3}=\frac{x_2+3}{x_2-3}\Rightarrow 1+\frac{6}{x_1-3}=1+\frac{6}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-3}=\frac{1}{x_2-3}\Rightarrow x_1-3=x_2-3$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً آیا f و g وارون یکدیگرند.

حل: باید $D_f=R_g$ و $D_g=R_f$ باشد.

$$y=f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}}\quad\Rightarrow\quad y^3=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}$$

$$\Rightarrow y^3-1=\frac{6}{x-3}\Rightarrow x-3=\frac{6}{y^3-1}$$

$$\Rightarrow x=3+\frac{6}{y^3-1}=\frac{3y^3-3+6}{y^3-1}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3y^3+3}{y^3-1}\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=\frac{3x^3+3}{x^3-1}$$

با این محاسبه مشخص است که $g(x)\neq f^{-1}(x)$ است.

9) کدام یک از توابع زیر یک به یک و پوشا است؟

1) $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x}$

حل) این تابع به صورت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x} & x>0\\ \dfrac{-x+1}{x}\end{cases}$ است.

هر جزء این تابع یک به یک و پوشاست، چون تابع هموگرافیک است.

2) $f(x)=|x|+1 \quad , \quad f:R^+\to R$

حل: این تابه به صورت $f(x)=x+1$ است که یک به یک است.

ولی پوشا نیست چون $R_f=(1,+\infty)\neq R$ است.

3) $f(x)=\sqrt[3]{x}+2 \quad , \quad f:R\to R$

حل: این تابع یک به یک است چون:

$$\begin{aligned} & f(x_1)=f(x_2) \\ & \Rightarrow \sqrt[3]{x_1+2}=\sqrt[3]{x_2+2} \qquad \Rightarrow \sqrt[3]{x_1}=\sqrt[3]{x_2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow x_1=x_2 \end{aligned}$$

این تابع پوشا نیز است چون:

$$\begin{aligned} & y=\sqrt[3]{x}+2 \Rightarrow y-2=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=(y-2)^3 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow R_f=R \end{aligned}$$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1} \quad , \quad f:R-\{1\}\to R$

حل: تابع به صورت $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ روی دامنه‌اش حتماً یک به یک است.

این تابع پوشا نیست، چون:

$$y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2x-2+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{x-1}=y-2 \Rightarrow x-1=\frac{3}{y-2}$$

$$\Rightarrow x=1+\frac{3}{y-2}=\frac{y+1}{y-2}$$

$$R_f=R-\{2\}\neq R.$$

10) تابع $f:R-\{1\}\to R-\{a\}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x)=\frac{2x-2+1}{x-1}=2+\frac{1}{x_1-1}$$

$$f(x)=f(x_2) \Rightarrow 2+\frac{1}{x_1-1}=2+\frac{1}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-1}=\frac{1}{x_2-1} \quad \Rightarrow \quad x_1-1=x_2-1$$

$$\Rightarrow \quad x_1=x_2$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً a را طوری بیابید که f پوشا باشد.

حل: باید $R_f=R-\{a\}$ را در نظر بگیریم. ابتدا $R_f$ را به صورت زیر می‌یابیم:

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1}=y-2$$

$$\Rightarrow x-1=\frac{1}{y-2} \Rightarrow x=1+\frac{1}{y-2}$$

$$\Rightarrow \quad R_f=R-\{2\} \qquad \Rightarrow a=2$$

11) وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$

حل: این تابع یک به یک است. پس وارون دارد و داریم:

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow yx - y = 3x+2 \Rightarrow x(y-3) = y+2$$
$$\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

ب) $f(x) = \sqrt{x-4}$.

حل: این تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است و داریم:

$$y = \sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 = y^2 \Rightarrow x = y^2+4$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+4$$

ج) $f(x) = \begin{cases} x & x>1 \\ x^2 & 1 \le x \le 9 \\ 27\sqrt{x} & 9 < x \end{cases}$

حل) چون هر ضابطه یک به یک است، تابع یک به یک و وارون‌پذیر است:

$$f_1(x) = x \quad , \quad x>1 \quad \Rightarrow f_1^{-1}(x) = x \qquad x>1$$
$$f_2(x) = x^2 \quad , \quad 1 \le x \le 9 \quad \Rightarrow \quad f_2^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad 1 \le x \le 81$$
$$f_3(x) = 27\sqrt{x} \quad x\rangle 9 \quad \Rightarrow \quad f_3^{-1}(x) = \frac{x^2}{(27)^2} \qquad x\rangle 81$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x>1 \\ \sqrt{x} & 1 \le x \le 81 \\ (\frac{x}{27})^2 & x > 81 \end{cases}$$

# فصل دوم

حد و پیوستگی

1. همسایگی‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید. پس آنها را روی یک خط نشان دهید.

الف) $N(1,\frac{1}{2})=\left\{x \middle| |x-1|<\frac{1}{2}\right\}$

ب) $N(0,3)=\{x \,|\, |x|<3\}$

ج) $N'(1,3)=\{x \,|\, |x-1|\le 3\}$

د) $N'(1,5)=\{x \,|\, |x-1|\le 5\}$

2) مجموعهٔ $A=\{x\in \,|\, |2x+3|<1\}$ یک همسایگی متقارن a به شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

حل:

$$|2x+3|=2\left|x+\frac{3}{2}\right|=2\left|x-(-\frac{3}{2})\right|<1$$

$$\Rightarrow \quad \left|x-(-\frac{3}{2})\right|<\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a=-\frac{3}{2} \;\;,\;\; r=\frac{1}{2}$$

مجموعهٔ $A=\{x\in R \,|\, |3x-1|<|x+1|\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع r است. a و r را تعیین کنید:

حل:

$$|3x-1|<|x+1| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|3x-1|}{|x+1|}<1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x-1}{x+1}\right|<1 \qquad \Rightarrow \qquad -1<\frac{3x-1}{x+1}<1$$

$$\Rightarrow\ -1<3\frac{-4}{x+1}<1 \quad \Rightarrow \quad 3-\frac{4}{x+1}<1$$

$$\Rightarrow\ 2<\frac{4}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 1<\frac{2}{x+1}\ \Rightarrow\ 0<\frac{1-x}{x+1}$$

$$\Rightarrow\ -1<x<1$$

$$-1<3-\frac{4}{x+1}-4<\frac{-4}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1}<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1}-1<0\ \Rightarrow\ \frac{-x}{x+1}<0\ \Rightarrow\ -1<x<0$$

$$(-1,1)\ \mathbf{U}\ (-1,0)\ =\ (-1,1)$$

جواب= $a=0 \quad , \quad r=1$

اگر $(2+a\ ,\ 4-2a)$ یک همسایگی متقارن 5 باشد. شعاع همسایگی را تعیین کنید:

حل:

$$N(5,7)\ =\ (2a-4\ ,\ a+2)$$
$$\Rightarrow\ (5-7\ ,\ 5+r)\ =\ (2a-4\ ,\ a+2)$$
$$\Rightarrow\ \begin{cases}5-r=2a-4\\5+r=a+2\end{cases}\ \Rightarrow\ 10=3a-2\ \Rightarrow\ \begin{matrix}a=4\\r=1\end{matrix}$$

5) مجموعه $A=\{x\in R \mid |2x+3|<6\}$ یک همسایگی a به شعاع 4 است.

a و r را تعیین کنید:

$$|2x+3|<6 \Rightarrow 2\left|x+\frac{3}{2}\right|<6 \quad \Rightarrow \quad \left|x+\frac{3}{2}\right|<3$$
$$\Rightarrow \quad a=-\frac{3}{2}\ ,\ r=3$$

**تمرین.** 2-2-6 **صفحهٔ** 63

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(5x+4)=9$ $\qquad |5x+4-9|=5|x-1|<4$

$$\Rightarrow\ |x-1|<\frac{4}{5}$$

**پس قرار می‌دهیم** $d\leq \frac{e}{5}$

2) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+2)=-4$

$$|3x+2+4|=3|x+2|<4 \quad \Rightarrow\ |x+2|<\frac{4}{3}$$

**قرار می‌دهیم** $d\leq \frac{e}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|$$

ماکزیمم $|x+2|$ را در همسایگی $-1<x-2<1$ به دست می‌آوریم.

$$-1<x-2<1 \quad\Rightarrow\quad 1<x<3 \quad\Rightarrow\quad \max(x+2)=5$$
$$\Rightarrow |x^2-4|\leq 5|x-2|<4$$

کافی است $d\leq \min\left\{1,\frac{e}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

4) $\lim\limits_{x\to -2}x^2=4$ $\qquad |x^2-4|=|x-2||x+2|$

ماکزیمم $|x-2|$ را در همسایگی زیر می‌یابیم.

$$-1 < x+2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -3 < x < -1 \Rightarrow \max|x-2| = 3$$

کافی است $d \le \min\left\{1, \frac{e}{3}\right\}$ را در نظر بگیریم.

$$5) \quad \lim \frac{3x+1}{x+2} = \frac{4}{3}$$

$$\left|\frac{3x+1}{x+2} - \frac{4}{3}\right| = \left|= \frac{9x+3-4x-8}{x+2}\right| = \frac{5|x-1|}{|x+2|}$$

$$-1 < x-1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad \max\frac{5}{|x+2|} = \frac{5}{2}$$

کافی است $d \le \min\left\{1, \frac{e}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

$$4) \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2}{5x-8} = 3$$

$$\left|\frac{x^2+2}{5x-8} - 3\right| = \left|\frac{x^2+2-15x+24}{5x-8}\right| = \frac{|x-13||x-2|}{|5x-8|}$$

$$-1 < x-2 < 1 \quad 1 < x < 3$$

ماکزیمم $\left|\frac{x-13}{5x-8}\right|$ روی این بازه به علت صعودی بودن برابر است با:

$$\left|\frac{3-13}{15-8}\right| = \left|\frac{-10}{7}\right| = \frac{10}{7}$$

پس کافی است. $d \le \min\left\{1, \frac{e}{10}\right\}$ در نظر گرفته شود.

$$7)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-3x+3}=1$$

$$\left|\frac{x^2-3}{x^2-3x+3}\right|=\left|\frac{x^2-3-x^2+3x-3}{x^2-3x+3}\right|=\frac{3}{\left|x^2-3x+3\right|}|x-2|$$

$$-1<x-2<1 \quad \Rightarrow 1<x<3$$

تابع $x^2-3x+3$ می‌بینیم خود را در $x=\dfrac{3}{2}$ دریافت می‌کند پس:

$$\max\frac{3}{\left|x^2-3x+3\right|}=\frac{3}{(\frac{3}{2})^2-3(\frac{3}{2})+3}=\frac{3}{\frac{9}{4}-\frac{18}{4}+3}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=4$$

پس کافی است $d\le\min\left\{1,\dfrac{e}{4}\right\}$ در نظر گرفته شود.

$$8)\quad \lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad 1-x\langle x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1 \;\Rightarrow\quad x<0 \quad\Rightarrow -x<x\left[\frac{1}{x}\right]-1\le 0$$

$$x\langle 0 \quad\Rightarrow\quad 1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x \quad\Rightarrow\quad x\left[\frac{1}{x}\right]-1<-x \quad\Rightarrow\quad \left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right|<|x|$$

اگر $d\le e$ باشد مسأله حل است.

$$9)\quad \lim_{x\to 3}(-1)^{[x]}\frac{x^2-9}{x^2+3}=0$$

$$\left|(-1)^{[x]}\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+3}\right|=\frac{|x+3|}{x^2+3}|x-3|$$

$$-1<x-3<1 \quad\Rightarrow\qquad 2<x<4$$

$$\max\left\{\frac{x+3}{x^2+3}\right\}=\frac{7}{4+3}=1$$

پس کافی است $d\le\min\{1,e\}$ در نظر گرفته شود.

10) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-10x) = -21$

$|x^2-10x+21| = |x-7|\,|x-3|$

$-1 \langle x-3 \langle 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \langle x \langle 4 \quad \Rightarrow \quad \max|x-7| = |4-7| = 3$

کافی است $d \le \min\left\{1,\frac{e}{3}\right\}$ در نظر گرفته شود.

11) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-2}{x-2} = 7$

$\left|\frac{x^2-2}{x-2}-7\right| = \left|\frac{x^2-2-7x+14}{x-2}\right| = \frac{|x-4|\,|x-3|}{|x-2|}$

$-1 < x-4 < 1 \quad \Rightarrow \quad 3 < x < 5$

$\max\left|\frac{x-3}{x-2}\right| = \left|\frac{5-3}{5-2}\right| = \frac{2}{3}$

**پس قرار می‌دهیم** $d \le \min\left\{1,\frac{3}{2}e\right\}$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x-1}{5x-3} = \frac{3}{2}$

$\left|\frac{4x-1}{5x-3}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{8x-2-15x+9}{5x-3}\right| = \frac{7}{|5x-3|}\,|x-1|$

$-1 < x-1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 2$

$\max\frac{7}{|5x-3|} = \frac{7}{|0-3|} - \frac{7}{3}$

پس $d \le \min\left\{1,\frac{3}{7}e\right\}$ را در نظر می‌گیریم.

13) $\lim\limits_{x\to 2} (-1)^{[x]}\frac{x^2-4}{x+2} = 0$

$\left|(-1)^{[x]}\frac{x^2-4}{x+2} - 0\right| = |x-2|$

کافی است $d = e$ در نظر گرفته شود.

$$14)\quad \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{6}$$

$$\left|\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}-\frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+3}-\frac{1}{6}\right| = \left|\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right|$$

$$= \frac{|x-9|}{(\sqrt{x}+3)^2}$$

$$-1 < x-9 < 1 \Rightarrow \quad 8 < x < 10$$

$$\max \frac{1}{(\sqrt{x}+3)^2} = \frac{1}{(\sqrt{8}+10)^2}$$

کافی است $\left\{1 ,\ (\sqrt{8}+10)^2 e\right\}$ $d \le \min$ در نظر گرفته شود.

$$15)\quad \lim_{x\to 4} \frac{2}{x-3} = 2$$

$$\left|\frac{2}{x-3}-2\right| = \left|\frac{2-2x+6}{x-3}\right| = \frac{2|x-4|}{|x-3|}$$

$$-\frac{1}{2} < x-4 < \frac{1}{2} \ \rightarrow \ \frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$$

$$Max \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{\left|\frac{7}{2}-3\right|} = 4$$

پس $d \le \min\left\{\frac{1}{2}, e\right\}$

$$16)\quad \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{2x-1} = 3$$

$$\left|\frac{2x+1}{2x-1} - 3\right| = \left|\frac{2x+1-6x+3}{2x-1}\right| = \frac{4}{|2x-1|}\ |x-1|$$

$$-\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\ \max \frac{4}{|2x-1|} = \frac{4}{\left|2(\frac{3}{4})-1\right|} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

پس $d \le \min\left\{\frac{1}{4}\ ,\ \frac{e}{8}\right\}$

$$17)\quad \lim_{x\to 6} \frac{x}{x-3} = 2$$

$$\left|\frac{x}{x-3} - 2\right| = \left|\frac{x-2x+6}{x-3}\right| = \frac{|x-6|}{|x-3|}$$

$$-1 < x-6 < 1 \quad \Rightarrow \qquad 5 < x < 7$$

$$\Rightarrow \qquad \max \frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{|5-3|} = \frac{1}{2}$$

پس $d \le \min\{1, 2e\}$

$$18)\quad \lim_{x\to -4} \frac{1}{x+3} = -1$$

$$\left|\frac{1}{x+3}+1\right| = \left|\frac{x+4}{x+3}\right| = \frac{|x+4|}{|x+3|}$$

$$-\frac{1}{2}\langle x+4\langle\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{9}{2}\langle x\langle -\frac{7}{2}$$

$$\max \frac{1}{|x+3|} = \frac{1}{\left|-\frac{9}{2}+3\right|} = \frac{2}{3}$$

پس $d \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}e\right\}$

$$19)\quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}}\right| = \left|\frac{(2-\sqrt{5-x})(2+\sqrt{5-x})}{2\sqrt{5-x}(2+\sqrt{5-x})}\right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2\sqrt{5-x}(2+\sqrt{5-x})}$$

$$-1 < x-1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 2$$

$$\max \ \frac{1}{2\sqrt{5-x}(2+\sqrt{5-x})} = \frac{1}{2\sqrt{5-2}(2+\sqrt{5-2})}$$

پس $d \le \min\{1 \ , \ (2\sqrt{3}(2+\sqrt{3}))e\}$

$$20)\quad \lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x+4} = -8$$

$$\left|\frac{x^2-16}{x+4}+8\right| = \left|\frac{x^2-16+8x+32}{x+4}\right| = \left|\frac{(x+4)^2}{x+4}\right|$$

$$= |x+4|$$

کافی است $d=e$.

## تمرین 2-3-29 صفحه 80.

حدهای زیر را حساب کنید.

$$1)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+3x-4} = \lim\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim \frac{x+1}{x+4}=\frac{2}{5}$$

$$2)\quad \lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\lim\frac{(x^2-x-2)}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}=\lim\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim\frac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\frac{-1-2}{-1-\sqrt{-1+2}}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

$$3)\quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}=\lim\frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(x-4)}=\lim\frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{5\times 4}=\frac{1}{20}$$

$$4)\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-9x-10}{x^2+3x+2}=\lim\frac{(x-10)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim\frac{x-10}{x+2}=\frac{-11}{1}$$

$$5)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+19x-20}{x^2-1}=\lim\frac{(x-1)(x+20)}{(x-1)(x+1)}=\lim\frac{x+20}{x+1}=\frac{21}{2}$$

6) $$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}=\lim\frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x}-3}=\lim\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{3}+3)(x+9)}{\sqrt{x}-3}$$
$$=\lim\ (\sqrt{x}+3)(x+9)=108\{$$

7) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-x-6}=\lim\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2})+1)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim\frac{x-3}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-2}+1)}=\frac{1}{5\times 2}=\frac{1}{10}$$

8) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+x^2+4}{x^2-4}=\lim\frac{(x+2)(x^2-x+2)}{(x^{\circ}-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{8}{-4}=-2$$

9) $$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\frac{3x+1}{x+1}=2$$

$$10)\quad \lim_{x\to1}\frac{x^{20}-4x+3}{x^{15}-5x+4}=\lim\frac{x^{20}-x-3x+3}{x^{15}-x-4x+4}$$

$$=\lim\frac{x(x^{19}-1)-3(x-1)}{x(x^{14}-1)-4(x-1)}=\lim\frac{(x-1)(x(x^{18}+x^{17}+...+x+1-3)}{(x-1)(x(x^{13}+x^{12}+...+x+1-4)}$$

$$=\frac{19-3}{14-4}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

$$11)\quad \lim_{x\to1}\frac{x^4+x^3-x-1}{x^3+3x^2-x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x^4-1+x(x^2-1)}{x(x^2-1)+3(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x^2+1+x)}{(x^2-1)(x+3)}=\frac{3}{4}$$

$$12)\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$13)\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim\frac{2x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{3}{2}$$

$$14)\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\frac{2}{3}$$

## تمرین صفحه 106

حد هر یک از توابع زیر را بیابید.

1) $\lim\limits_{x\to 3}[x]$

$\lim\limits_{x\to 3^+}[x]=3$

**تابع حد ندارد.** $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 3^-}[x]=2$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[2x+1]$

$\lim\limits_{x\to 1^+}[2x+1]=3$

تابع حد ندارد. $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}[2x+1]=2$

3) $\lim\limits_{x\to 1}[3-2x]=3+\lim\limits_{x\to 1}[-2x]$ $\Rightarrow$ حد ندارد.

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{5-x}$ $\Rightarrow$ حد ندارد.

5) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x-2}=\dfrac{(-1)^1}{1-2}=\dfrac{-1}{-1}=1$

6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x-2}=\dfrac{(-1)^0}{1-2}=\dfrac{1}{-2}=-1$

7) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-|2-x|-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-(2-x)-2}{x-2}=\lim\dfrac{2x-4}{x-2}=2$

8) $\lim\dfrac{\sin x}{\sin 2x}=\lim\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{2x}{\sin 2x}\times\dfrac{1}{2}=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=2$

10) 10) $\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=0$ (کراندار در حد صفر)

11) $\lim\limits_{x\to2}(x-[x])$ $\Rightarrow$ .حد وجود ندارد

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x[x]}{2x+|x|}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4x[x]}{2x+|x|}=\dfrac{0}{2x+x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{4x[x]}{2x+|x|}=\dfrac{-4x}{2x-x}=-4$

$\Rightarrow$ .حد ندارد

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$

14) $\lim\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt[4]{(x+1)^3}+\sqrt[4]{(x+1)^2}+\sqrt[4]{(x+1)}+1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\dfrac{4}{3}$

$$15)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x}}=\lim\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}.\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{8}$$

$$16)\quad \lim\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\frac{\sqrt[6]{\cos^3 x}-\sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}(\sqrt[6]{\cos x}-1)}{\sin^2 x}=\lim\frac{(\cos x-1)}{\sin^2 x(\sqrt[6]{\cos^0 x}+\ldots+\sqrt[6]{\cos x}+1)}$$

$$\lim\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

$$17)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\frac{\sin(1-x)}{x-1}=-2$$

$$18)\quad \lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\Pi}{2}x$$

$$1-x=\quad\Rightarrow x=1-t\quad\Rightarrow\qquad =\lim_{t\to 0}t\ \ tg\frac{p}{2}(1-t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\ \ t\ \ \cot\frac{p}{2}t$$

$$=\lim\frac{t}{\sin\frac{p}{2}t}.\cos\frac{p}{2}t=\frac{2}{p}$$

$$19)\quad \lim_{x\to\frac{p}{2}}\ tg(2x)\ \ tg\ \ (\frac{p}{4}-x)=0\times -1=0$$

20) $\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+X^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x^2}{2}+x)^n-(1+\frac{x^2}{2}-x)^n}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{x}=2n$

21) $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-1}{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1$

22) $\lim_{x\to 0^+}(x\left[\frac{2}{x}\right]+\frac{x}{2}-2)=2-2=0$

23) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$

24) $\lim_{x\to 1}((-1)^{[x]}\frac{x-1}{x}=0$ (تابع کراندار در تابع با حد صفر ضرب شده)

25) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{[x]}=\frac{1}{-1}=-1$

26) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}$

$=\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4=4+4+4=12$

## صفحه 127

27) $(a \neq 1)\ \lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}$

28) $\lim_{x\to 1}\frac{|x^3-1|+3(1-x^2)[x-1]}{x-1}$ حد وجود ندارد.

29) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$

$$=\lim\frac{2x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}+2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim\frac{x^2}{x^2(\frac{\sin^{2\frac{x}{2}}}{x^2}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\ ,\cos\frac{x}{2})}=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$$

30) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

31) $\lim\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim\frac{1-\cos x}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}.\frac{1}{2}=0$

32) $\lim_{x\to -2}\frac{2x-2}{|x-2|+[x-2]}=\lim\frac{2(x-1)}{-(x-2)-1}=\frac{2}{-1}$

$$=-2$$

33) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{\sin x}{x}=0$

34) $\lim_{x\to 1^-} Arcty\ \frac{1}{1-x}=\lim\ Arcty\ \frac{1}{0^+}=\lim\ Arcty(+\infty)=\frac{p}{2}$

35) $\lim\limits_{x\to1^+} Arcty\,\frac{1}{1-x} = \lim\ Arcty\,\frac{1}{\mathbf{0}^-} = \lim\ Arctg\ (-\infty) = -\frac{p}{2}$

36) $\lim\limits_{x\to1^-}\ \frac{Arc\cos(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim$

37) $\lim\limits_{x\to\mathbf{0}} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to\mathbf{0}} \frac{1-\frac{x}{2}-1}{\sin 2x} = \lim \frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = \lim \frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = -\frac{1}{4}$

## 32-4-2 تمرین صفحه 108

(1) ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \mathbf{0}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\ f(x) = \mathbf{0}$

حل: با توجه به نامساوی $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ و با استفاده از قضیه فشردگی

چون $\lim\limits_{x\to a} |\ f(\mathbf{0})\ | = |f(x)| - \lim = \mathbf{0}$است پس $\lim\limits_{x\to a}\ f(x) = \mathbf{0}$

2) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f در x=1 دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4 \ , & x\langle 1 \\ [x]\ -a & x\rangle 1 \end{cases}$$

حل :

$\lim\limits_{x\to1^-}\ f(x)\ =\ \lim\limits_{x\to1^-}\ (3x+4)\ =\ 7$

$\lim\limits_{x\to1^+}\ \ f(x)\ \ \lim\limits_{x\to1^+}\ ([x]-a) = 1-a$

$\Rightarrow\ \ 1-a=7\ \ \ a=-6$

3) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ax+b & x\langle -1 \\ x^2-b & x\rangle -1 \end{cases}$ ، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید

که $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$

حل)

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2-b)=1-b=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(ax+b)=-a+b=2$$

$$\Rightarrow b=-1 \qquad \Rightarrow \qquad a=-3$$

4) فـرض کنیـد: $f(x)=\begin{cases}2x-a & x<-3\\ ax+2b & -3\le x\langle 3\\ b-q\,x & 3<x\end{cases}$ a و b را طـوری تعیـین کنیـد کـه $\lim f(x)$ و $\lim f(x)$ موجود باشند.

$$\Rightarrow\begin{cases}3a+3b=-15\\ -2a+2b=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-5\\ -a+b=-3\end{cases}\Rightarrow 2b=-8$$

$$\Rightarrow b=-4 \qquad a=-1$$

5) فرض کنید $F(x)=\begin{cases}x^2+3 & , \quad x\le 1\\ x+1 & , \quad x>1\end{cases}$ , $g(x)=\begin{cases}x^2 & , x\le 1\\ x & , x>1\end{cases}$

نشان دهید، این توابع در $x=1$ حد ندارند ولی تابع $f(x)g(x)$ در $x=1$ حد دارد.

حل.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3)=4\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2\end{array}\right\} \Rightarrow \text{حد ندارد } f$$

$$\lim_{x\to1^-} g(x)=\lim_{x\to1^-} x^2=1$$
$$\Rightarrow \quad g \text{ حد ندارد}$$
$$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim 2=$$

تابع $f(x)g(x)$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x).g(x)=\begin{cases} x^2(x^2+3) & , \ x\le 1 \\ 2(x+1) & , \ x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x).g(x)=\lim x^2(x^2+3)=4$$
تابع حد دارد. $\Rightarrow$
$$\lim_{x\to1^+} f(x).g(x)=\lim 2(x+1)=4$$

(6) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ 1 & , \quad x>0 \end{cases}$ ، مقدار $\lim_{x\to\sqrt{2}^+} x\left(x^2-2\right)$

را حساب کنید.

حل) چون $f\left(x^2-2\right)=1$ است. پس

$$\lim\left(x\, f\left(x^2-2\right)\right)=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$$

(7) حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to4}\left([x]-\left[\frac{x}{4}\right]\right)$

حل)

$$\lim_{x\to4^+}\left([x]-\left[\frac{x}{4}\right]\right)=4-1=3$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to4^-}\left([x]-\left[\frac{x}{4}\right]\right)=3-0=3$$

**حد =3**

ب) $\lim([3x]+[-3x])$

حل) توجه کنید اگر $3x \notin z$ آنگاه $[3x]+[-3x]=-1$ پس حد برابر $-1$ است.

(8) در مورد تابع $f: R \to R$ می‌دانیم:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad x\ ,\ y \notin R$$

ثابت کنید که اگر $f$ در نقطه صفر حد داشته باشد آنگاه در هر نقطه دیگر هم حد دارد.

همچنین ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ وجود داشته باشد. برابر صفر است.

حل: نقطه دلخواه $x_0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $t>0$ باشد.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{t\to 0^+} f(x_0+t)=\lim_{t\to 0^+}\big(f(x_0)+f(t)\big)=f(x_0)+0$$

پس $\lim f(x)=f(x_0)$ یعنی تابع در هر نقطه حد دارد.

در فوق از این نکته استفاده کرده‌ایم که $\lim\limits_{ط\to 0} f(x)=0$ می‌شود زیرا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0} f\left(\frac{x}{2}\right)+\lim f\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

9) فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ اگر $A\neq 0$ ثابت کنید عددی مثبت مانند $d$ وجود دارد که هرگاه $0<|x-a|<d$، آنگاه $d$ وجود دارد که

$$0<|x-a|<d \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\big||f(x)|-|A|\big| \le |f(x)-A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{|A|}{2} < |f(x)|-|A|$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{|A|}{2} < |f(x)|$$

(10) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x-|x| \;, & |x| \\ x-|x+1|, & |x| \end{cases}$ ، همه نقاطی را بیابیـد کـه $f$ در آنها حد دارد.

حل) تابع $f$ به صورت زیر قابل بیان است.

$$f(x)=\begin{cases} x-|x| & |x| \\ x-|x+1|-1 & |x| \end{cases}$$

این تابع در اعداد صحیح حد دارد. یرا اگر $x_0 = x$ عدد صحیح باشد. اگر $n$ زوج باشد

$$x \to x_0^{+} \quad \Rightarrow \quad [x]=n \qquad \text{فرد} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0^{+}} f(x)=n-n=0$$

$$x \to x_0^{+} \quad \Rightarrow \quad [x]=n-1 \qquad \text{فرد} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0^{-}} f(x)=n-(n-1)-1=0$$

مشابهاً اگر $n$ فرد باشد. حد موجود است.

در اعداد غیر صحیح نیز این تابع حد دارد. چون در سمت راست یا چپ $x_{m0}$ ، $[x]$ زوج یا فرد باقی می‌ماند.

پس این تابع روی $R$ حد دارد.

(11) فرض کنید. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ و $B$ عددی حقیقی باشد که $A>B$. پ

ثابت کنید عددی مثبت مانند وجود دارد که اگر $0<|x-a|<d$ ، آنگاه

$f(x)>\frac{A+B}{2}$ .

حل) چون $A>B$ پس $A>B$ پس $A-B>0$ اگر قرار دهیم $e=\frac{A-B}{2}$ چون

حدود وجود دارد. پس $d>0$ وجود دارد که:

$$0<|x-a| \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-A<\frac{A-B}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{A-B}{\quad}<f(x)-A<f\,\frac{A-B}{\quad}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A-B}{2}<f(x) \Rightarrow \frac{A+B}{2}<f(x)$$

(12) فرض کنید $\sqrt{1+x^2}\le f(x)\le 1+|x|$ . $\lim f(x)$ را حساب کنید

حل) داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+|x|)=1$

پس طبق قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

## 7-5-2 تمرین صفحه 115

ب) استفاده از تعریف ثابت کنید:

(1 $$\lim_{x\to -1} x\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2}=+\infty$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2}>M \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2<\frac{2\sqrt{2}}{M} \quad \Rightarrow \quad |x+1|<\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$$

پس کافی است. $d \le \dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$

2) $$\lim_{x \to -2} \frac{-3}{(x+2)^4} = -2$$

$$\frac{-3}{(x+2)^4} < -M \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{(x+2)^4} > M \quad \Rightarrow \quad (x+2)^4 < \frac{3}{M}$$
$$\Rightarrow \quad |x+2| < \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$$

پس کافی است. $d \le \sqrt[4]{\dfrac{3}{M}}$

$$\frac{2x+3}{x-2} = 2 + \frac{5}{x+2} > M \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{x-2} > M-2 \quad \Rightarrow \quad x-2 < \frac{5}{M-2}$$

کافی است. $d \le \dfrac{5}{M-2}$

4) $$\lim_{x \to 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty$$

$$\frac{1-4x}{x-4} = \frac{15+16-4x}{x-4} = -4 - \frac{15}{x-4} > M \quad \Rightarrow \quad -\frac{15}{x-4} > M+4$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{15}{M+4} > x-4$$

6) $$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty$$

$$\frac{3x}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2} < -M \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{x-2} < -(3+M)$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{6}{x+M} < x-2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3}{3+M}$$

7) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5}{2x^2-1}$$

$$\left|\frac{4x^2-5}{2x^2-1}-2\right|=\left|\frac{4x^2-5-4x^2+2}{2x^2-1}\right|=\left|\frac{3}{\left|2x^2-1\right|}\right|<e$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3}{e}<2x^2-1\quad\Rightarrow\quad\frac{3+e}{2e}<x^2$$

$$\Rightarrow\quad\sqrt{\frac{1-e}{e}}<x$$

**کافی است** $M>\sqrt{\frac{3+e}{2e}}$

8) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$$

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2+1}-2\right|=\frac{1}{x^2+1}<e\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{e}<x^2+1$$

$$\Rightarrow\quad\sqrt{\frac{1-e}{e}}<x$$

کافی است. $\sqrt{\frac{1-e}{e}}<M$

9) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+8x\right)=+\infty$$

$$x^2+8x=(x+4)^2-16\quad>M\quad\Rightarrow\quad x>\sqrt{M+16}-4$$

**کافی است** $N>\sqrt{M+16}-4$

10) $$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2+4x\right)=-\infty$$

$$-x^2+4x=-(x-2)^2+<-m$$
$$\Rightarrow \quad M+4<(x-2)^2$$
$$\Rightarrow \quad 2+\sqrt{m+4}<x$$

پس $N>2+\sqrt{M+4}$

(11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|=\frac{2}{x^2-1}<e \Rightarrow \frac{2}{e}<x^2-1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2+e}{4e}< \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2+e}{e}}<x$$

پس $M\sqrt{\frac{2+e}{e}}$

(12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2-x}=+\infty$

$$\frac{x^2}{2-x}>M \qquad \Rightarrow \qquad x^2>2M-Mx$$
$$\Rightarrow \qquad x^2>Mx+\frac{M^2}{e}>2M+\frac{M^2}{e}$$
$$\Rightarrow \qquad \left(x+\frac{M}{2}\right)^2>2M+\frac{M^2}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad x>\sqrt{2M+\frac{M^2}{e}}-\frac{M}{2}$$

**کافی است** $N < \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2}$

13) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^5 - 3\right) = +\infty$

$$x^5 - 3 > M \quad \Rightarrow \quad x^5 > M + 3$$
$$\Rightarrow \quad x > \sqrt[5]{M + 3}$$

**پس** $N > \sqrt[5]{\ } M + 3$

14) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^5 + x\right) = +\infty$

$$x^5 + x > M \quad \Rightarrow$$

به علت اینکه $x \to +\infty$ پس $x$ را می‌توان نادیده گرفت.

$$x^5 x > x^5 + 1 > M \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt[5]{M - 1} \quad \Rightarrow \quad N \geq \sqrt[5]{M - 1}$$

15) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 5}{2x - 4} = \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{x + 5}{2(x + 1)} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2}{x + 1} \right| < e$$
$$\Rightarrow \quad \frac{4}{e} - 2 < x \quad \Rightarrow \quad M \geq \frac{4}{e} - 2$$

17) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

$$\sqrt{x^2 + 1} > N \quad \Rightarrow x^2 > N - 1 \quad \Rightarrow x > \sqrt{N - 1} \quad \Rightarrow M \geq \sqrt{N - 1}$$

18) $\lim_{x \to -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty$

$$-\sqrt{x^2 + 1} > N \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 - 7 > N^2$$
$$\Rightarrow \quad x > \sqrt{N^2 + 7} + 3 \qquad M \geq \sqrt{N^2 + 7} + 3$$

(19 $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-6x+2} = +\infty$

$$-\sqrt{x^2-4} < -N \quad \Rightarrow \quad x^2-4 > N^2 \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt{N^2+4}$$
$$\Rightarrow \quad M \geq \sqrt{N^2-4}$$

(20 $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-2x-2} = +\infty$

$$-\sqrt{x^2-2x-2} < N \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2-3 > N^2 \quad \Rightarrow \quad x-1 > \sqrt{N^2+3}$$
$$\Rightarrow \quad x > 1+\sqrt{N^2-3}$$

(21 $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-x} = -\infty$

$$-\sqrt{x^2-x} > -N \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} > N^2$$
$$\Rightarrow \quad x > \sqrt{\frac{1}{4}+N^2}+1$$

پس $M \geq \sqrt{\frac{1}{4}+N^2}+1$

## 2-5-25 تمرین صفحه 136

حدود زیر را حساب کنید.

1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim \frac{-x}{x} = -1$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x+2} = \lim \frac{-x}{x} = 1$

3) $\lim_{x\to2^+} \frac{|x|-1}{|x|-x} = \lim \frac{2-1}{0^-} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)=\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}+^2\sqrt[3]{x^3+1}+^2}=0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^2\right|-\left|x\right|^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|n^2\right|-\left|n^2\right|}{n^2-1}=0$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim\dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x}}=1$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{5+x^2}}{x^2}=\lim\dfrac{|x|}{2x}=\lim\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

8) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-x^2}-1}=0$

9) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3+x}{x^2-5x+6}=\dfrac{6}{1\times0^-}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty$

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}=}{x^2}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

11) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{(x-8)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\dfrac{6}{6}\lim\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=$

$\lim\limits_{x\to8}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)=4+4+4=12$

12) $\lim\limits_{x\to27}\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x+6}}-3}{(x-27)^3}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{(x-27)(x-27)^2\left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+6+3}\right)}=$

$\lim\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)$

13) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\sqrt{x+}}}}\ \sqrt{x}}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x}(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}+1)}=\frac{1}{2}$$

14) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{2[\cos x]}{x}=\frac{2-1}{0^-}=-\infty$$

15) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\frac{\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[12]{x^3}\left(1-\sqrt[12]{x}\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=-\lim\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[12]{x^{11}}+\sqrt[12]{x10}+\ldots+\sqrt[12]{x+1})}=\frac{1-}{12}=\frac{-1}{6}$$

16) $$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^4}{4}-1-\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

## 2-6-28 تمرین صفحه 163

(1) در مورد پیوستگی هر یک از توابع زیر سسسروی بازده داده شده تحقیق کنید.

الف) $f(x)=\frac{7}{x-3}$ روی بازه های $[0\ ,\ 3]$ , $(x)$ , $(-\infty\ ,\ 2],[2\ ,+\infty)$

ب) تنهـــا نقطـــه ناپیوســـتگی $x=3$ اســـت، پـــس تـــابع فقـــط روی $(-\infty\ ,\ 2]\ [2\ ,+\infty)$ , $[0\ ,\ 2]$ , $[0,2)$ $(-2,2)$.

حل) نقـــاط $x=\pm 2$ نقـــاط ناپیوســـتگی تـــابع اســـت. پـــس بـــازه‌هـــای $(-\infty\ ,-2)$ , $[0,2)$ $(-2,2)$ بازه‌های پیوستگی‌اند.

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{25-x^2}}$ روی بــازه هــای $(-5\ ,\ -\infty)$ و $[-5,-\infty-]$ , $[-5,-2]$ و

$(5,+\infty)\ ,\ [5,\infty),(-2,5),(-2,5]$

حل) ابتدا دامنه تابع را به دست می آوریم.

$D_f=(-\infty,-5)\cup[-2,5)$

| | -5 | -2 | 5 | |
|---|---|---|---|---|
| $25-x^2$ | - | + | + | - |
| $2+x$ | - | - | + | + |

طبق دامنه: تابع روی $[-2,-5-],(-2,5],[5,+\infty),(5,+\infty)$ ناپیوسته است.

تابع روی $(-5,-\infty)\ ,\ [-2,5)\ ,\ (-2,5)$ پیوسته است.

(2) فواصلی را تعیین کنید که تابع داده شده روی آنها پیوسته باشد.

1) $f(x)=\sqrt{x^2-x-12}$

حل) دامنه تابع برابر $D_f=(-\infty,-3)\cup[4,+\infty)$ است. این بازه‌ها فواصل پیوستگی اند.

2) $f(x)=\dfrac{7}{x^2-9}$.

حل) $D_f=R-\{\pm 3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$ این فواصل فواصل پیوستگی اند.

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x-1}$.

حل) چون فرجه رادیکال فرد و زیر رادیکال همه جا پیوسته است. فاصله پیوستگی $R$ است.

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x-4}}$

$D_f=[1,2]\cup(4,+\infty)$

| | | ۱ | ۲ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| x-4 | - | - | - | + |
| $x^2-3x+2$ | + | - | + | + |

3) نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ . حل) x=2 نقطه ناپیوستگی است.

2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ . حل) x=1 نقطه ناپیوستگی است.

3) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ . حل) x=1 نقطه ناپیوستگی است.

4) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x^2-3x+2}$ .

حل) $x=1,2$ نقاط ناپیوستگی اند.

5) $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & x\le -1\\ \sqrt{1-x^2} & -1<x<1\\ 2x+1 & 1<x\end{cases}$

حل) تابع در x=-1 و x=1 ناپیوستگی دارد. چون تابع در x=1 تعریف نشده و در x=-1 حد ندارد.

6) $f(x)=\begin{cases}[x] & -2<x<0\\ x-[x] & 0\le x<2\end{cases}$

حل)　تابع در نقاط x=-1 و x=1 از دامنه اش ناپیوسته است.

این تابع در x=0 پیوسته است چون $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

4) پیوستگی تابع داده شده را در نقطه یا فاصله داده شده بررسی کنید.

1) $x_0=2$ , $x_0=1$　　$f(x)=x-[x]$

حل)　تابع در هر دو عدد صحیح داده شده ناپیوسته است.

2) $x_0=1$　$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{|x-1|}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

این تابع در $x_0=1$ ناپیوسته است چون $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2\neq 1=f(1)$

3) $x_0=0$　$f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{2x}{|x|} & , \quad x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$

این تابع در $x_0=0$ ناپیوسته است چون $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-2\neq 2=f(0)$

4) فاصله $(4,6)$ و $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{2-x^2}}$ .

دامنه تابع برابر $(-\sqrt{2}\,,+\sqrt{2})$ است پس تابع f روی $(4,6)$ ناپیوسته است.

5) در فاصله $[1\,,+\infty)$ , $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ .

دامنه تابع برابر $(-\infty\,,\,0-1]\cup[1\,,+\infty)$ است پس تـابع روی $[1\,,+\infty)$ پیوسـته است.

6) در فاصله $(-\infty,2]$ , $f(x)=\sqrt{2-x}$ .

چون $D_f=(-\infty,2]$ است پس تابع روی $(-\infty,2]$ پیوسته است.

7) در فاصله $[-5,5]$ , $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ .

دامنه تابع برابر $[-5,5]$ است که تابع روی آن پیوسته است.

8) $x_0=1$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{|x|} & x>1\\ 2[2x]+1 & x<1\end{cases}$

تابع در $x_0=1$ تعریف نشده است پس در این نقطه ناپیوسته است.

(5) اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{3x^2-12}{x-2}$ پیوسته باشد. $f(2)$ را حساب کنید.

حل) $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)(x+2)}{x-2}=12$

(6) تـابع f بـا ضـابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x} & , & x\neq 0\\ 2 & , & x=0\end{cases}$ در نقطـه x=0 چـه نـوع ناپیوستگی دارد؟

حل) ناپیوستگی اساسی چون حد وجود ندارد زیرا: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\dfrac{2x}{x}=2$

(7) به ازاء چه مقدار a تابع f با ضـابطه $f(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ a & , \quad x=0 \end{cases}$ در x=0 پیوسته است.

حل) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x\ \cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow a=0$

(8) $f(x)=\begin{cases} -2\sin & -p\le x\le -\frac{p}{2} \\ a\sin x+b & -\frac{p}{2}<x<\frac{p}{2} \\ \cos x & \frac{p}{2}\le x\le p \end{cases}$ مقدار a و b را بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{p}{2}^-} f(x)=a+b=f(\frac{p}{2})=0 \qquad \Rightarrow \qquad a+b=0$$

$$\lim_{x\to -\frac{p}{2}^+} f(x)=-a+b=f(-\frac{p}{2})=2 \quad \Rightarrow -a+b=2$$

$$\Rightarrow b=1 \qquad , \qquad a=-1$$

(99) تابع با ضابطه $f(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]$ در $x=1$ چه نوع بستگی دارد؟

حل) داریـــم: $f(1)=1$ تعریـــف شـــده اســـت. ناپیوســـتگی اساســـی است.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(10) اگر $f(x)=\begin{cases}2x+ax\ , & x>2\\ ax^2+1\ , & x\le 2\end{cases}$ در R پیوسته باشد مقدار a را حساب کنید.

حل) چون ضابطه ها روی R پیوسته اند کافی است پیوستگی در x=2 بررسی شود.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x+ax)=4+2a=f(2)=4a+1$$

$$\Rightarrow 4+2a=4a+1 \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

11) به ازاء چه مقدار a تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[[x]-x]\ , & x\notin z\\ a\ , & x\in z\end{cases}$ همواره پیوسته است؟

حل) با توجه به خواص جزء صحیح همواره $0\le x-[x]<1$ پس $-1<[x]-x\le 0$ بنابراین برای $x\notin z$ همواره داریم $[[x]-x]=-1$ پس باید $a=-1$ باشد.

12) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2x+a\ , & x>1\\ 3\ , & x=1\\ bx-1\ , & x<1\end{cases}$ در x=1 پیوسته باشد a و b را حساب کنید.

حل)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(2x+a)=3 \Rightarrow 1+a=3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}(bx-1)=3 \Rightarrow b-1=3$$

$$\Rightarrow \qquad a=2 \quad , \qquad b=4$$

13) به ازاء چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}e^x+e^{-x}\ , & x\ge 0\\ 2a-x\ , & x<0\end{cases}$ در نقطه x=0 پیوسته

است.

حل)
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2a-x) = 2a = f(0) = 1+1 = 2$$
$$\Rightarrow a = 1$$

14) a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0 = 4$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a[x-2]+b & , \quad x<4 \\ \left[\dfrac{x}{3}\right]+b & , \quad x=4 \\ \dfrac{x^2-16}{x-4} & , \quad x>4 \end{cases}$$

حل)
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-16}{x-4} = 8 = f(4) = 1+b$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (a[x-2]+b) = 5a+b = f(4) = 1+b$$
$$1+b = 8 \qquad \Rightarrow b = 7 \qquad 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

15) اگر تابع با ضابطه $f(x) = (a^2-4a)[x] + 3[x] + \dfrac{x}{x^2+1}$ در R پیوسته باشد مقدارهای a را پیدا کنید.

حل) نقطه $x_0 = 0$ را در نظر بگیرید داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -(a^2-4a) - 3 = f(0) = 0$$
$$\Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1 \quad a = 3$$

16) پیوستگی تابع $f(x) = [x+[x]].[1-x+[x]]$ را در X=0 بررسی کنید.

حل) واضح است که $f(0) = 0$ است.

فرض کنید $x=0/1$ از راست نزدیک صفر باشد. و $f(0/1)=[0/1+0].[1-0/1+0]=0$ اگر $x=-0/1$ را از چپ نزدیک صفر در نظر بگیریم.

$$f(-0/1)=[-0/1-1][1+0/1+1]=0$$

بنابراین:
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$$

پس تابع در $x_0=0$ پیوسته است.

17) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}4x^3-9x^2+5x+1 & , \quad x\in z\\ 1 & , \quad x\notin z\end{cases}$ مفروض است. این تابع در چند نقطه صحیح پیوسته است. آیا این تابع در $x_0=\frac{5}{4}$ و $x_0=\sqrt{2}$ و $x_0=\frac{7}{3}$ پیوسته است.

حل) چون برای $x\notin z$ ، داریم $f(x)=1$ ، اگر $x_0$ عددی صحیح باشد آن گاه $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$. پس باید اعداد صحیحی را بیابیم که $f(x_0)=1$ باشد.

$$4x^{3x}-9x^2+5x+1=1\Rightarrow \qquad 4x^3-9x^2+5x=0 \qquad \Rightarrow x(4x^2-9x+5)=0$$
$$\Rightarrow x_0=0 \quad , \quad x_0=1 \quad , \quad x_0=\frac{5}{4}$$

این تابع در اعداد صحیح $x_0=0$ و $x_0=1$ پیوسته است.

این تابع در نقاط $x_0=\frac{5}{4}$ , $x_0=\sqrt{2}$ , $x_0=\frac{7}{3}$ پیوسته است زیرا این اعداد

صحیح نیستند و برای همه آنها $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 1$ است.

18) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x_0 = -2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+4x+4}} & , \quad x < -2 \\ a & , \quad x = -2 \\ b + [x^2] & , \quad x > -2 \end{cases}$$

**حل)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = b + 4 = f(-2) = a$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{|x+2|} = \lim_{x\to -2^-} -\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = 4 = a$$

$$\Rightarrow a = 4 \qquad , \qquad b = 0$$

19) a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر همواره پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + bx - 3 & , \quad x < 1 \\ x^3 - x + 4a & , \quad 1 \le x < 2 \\ 5x - 2b & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

حل) چون ضابطه ها چند جمله ای اند هر کدام همواره پیوسته اند باید پیوستگی در $x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ برقرار باشد.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)= \lim_{x\to 1^-}(2ax^2+bx+3)=2a+b+3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^3-x+4a)=8-2+4a$$

$$f(1)=1-1+4a=4a \quad , \quad f(2)=10-2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b+3=4a \\ 6+4a=10=2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b=-3 \\ 4a+2b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4b=-2 \quad \Rightarrow \quad b=-\frac{1}{2}, \quad a=\frac{5}{4}$$

32-6-2 تمرین صفحه 170.

1) فرض کنید تابع g در نقطه 0 پیوسته باشد $g(0)=0$ , $f$ تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه صفر در نامساوی $|f(x)|\le g(x)$ صدق کند. ثابت کنید f در نقطه 0 پیوسته است.

حل)

$$|f(x)|\le g(x) \Rightarrow |f(0)|\le g(0)=0 \Rightarrow |f(0)|=0$$

$$-|f(x)|\le f(x)\le |x| \Rightarrow 0\le f(0)\le 0 \Rightarrow f(0)=0$$

حال چون g پیوسته است پس $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ از طرفی داریم:

$$-g(x)\le f(x)\le g(x)$$

چون $f(0)=\lim f(x)=0$ $\lim g(x)=\lim -g(x)=0$ در نتیجه پس f در صفر پیوسته است.

2) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) اگر $f(a) > 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a مثبت است.

حل)

چون $f(a) > 0$ است اگر $e = \frac{f(a)}{2}$ را در نظر بگیریم : $d > 0$ موجود است به طوری که

$$|x-a| < 4 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(a)$$

چون $f(a) > 0$ پس f در همسایگی $d$ از a ، مثبت است.

ب) اگر $f(a) < 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a منفی است.

حل)

چون $f(a) < 0$ پس $-f(a) > 0$ اگر قرار دهیم $e = -\frac{f(a)}{2}$ چون f در a پیوسته است. $4 > 0$ موجود است به طوری که

$$|x-a| < 4 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow f(a) + \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) - \frac{f(a)}{2}$$

پس $\frac{3}{2} f(a) < f(x) < \frac{f(a)}{2}$

حال چون $f(a)<0$ پس در همسایگی $d$ از a ، f منفی است.

3) فرض کنید تابع f در $x_0$ پیوسته باشد و در هر همسایگی $x$ نقاطی مانند $x_1$ , $x_2$ وجود داشته باشد که $f(x_1)<0$ , $f(x_2)>0$ . ثابت کنید $f(x_0)=0$ .

حل) اگر $f(x_0)\neq 0$ طبق مسأله (2) همسایگی هایی حول $x_0$ وجود دارد که روی آنها $f(x)>0$ یا $f(x)<0$ . بنابراین نقاط $x_1$ , $x_2$ با شرایط فوق وجود ندارد پس $f(x_0)=0$ است.

4) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} & , \quad x\neq 0\\ a & , \quad x=0\end{cases}$$

حل) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}-1}{1+\frac{x}{3}-1}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

5) فـــــــــــرض کنیـــــــــــــد در نقـــــــــــاط دیگـــــــــــــر

$$f(x)=\begin{cases}[x+1]\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$$

پیوستگی f در نقطه های $0$ , $1$ بررسی کنید.

حل) $$\lim_{0\to -}[x+1]\sin\frac{1}{x}=0\times k=0 \qquad , \qquad x_0=0$$

حد راست این تابع وجود ندارد پس تابع در صفر پیوسته نیست.

برای $x_0 = 1$ حد راست برابر 0 است زیرا:

$$x \to 1^+ \Rightarrow \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \times \sin 1 = \sin 1 \neq 0$$

پس تابع در نقطه 1 پیوسته نیست.

6) $$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ناپیوستگی تابع های fog و gof را تعیین کنید.

حل: چون همواره $0 \le x - [x] < 1$ پس $0 < g(x)$ است لذا $fog(x) = f(g(x)) = 1$ این تابع همواره پیوسته است.

برای gof داریم:

$$gof(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

پس $gof(x) = 1$ همواره پیوسته است.

توجه: این مثال نشان می دهد ممکن است دو تابع ناپیوسته باشند ولی ترکیب آنها پیوسته باشد.

7) ثابت کنید تابعی مانند f در نقطه a پیوسته است اگر و فقط اگر
$$\lim_{x \to 0} f(x+a) = f(a)$$

حل) اگر f در a پیوسته باشد. به ازای $e > 0$ داده شده $d > 0$ موجود است که

$$|x-a|<d \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)|<e$$

اگر به جای x , $x+a$ قرار دهیم داریم:

$$|x-0| = (x+a)-a<d \Rightarrow \quad |f(x+a)-f(a)|<e$$

و این یعنی $\lim\limits_{x\to 0} f(x+a) = f(a)$

حال فرض کنید: $\lim\limits_{x\to 0} f(x+a) = f(a)$

اگر به جای x قرار دهیم t-a هرگاه $x \to 0$ آن گاه $t \to a$ .

پس $\lim\limits_{t \to a} f(t) = f(a)$ پس f در a پیوسته است.

8) نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x) = \begin{cases} x & |x| \le 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

حل) داریم: $f(1) = f(-1) = 1$

تابع در 1 پیوسته است.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \Rightarrow$$

تابع در $x=-1$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x = -1$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim 1 = 1 \qquad \Rightarrow$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{p}{2}x & , |x| \le 1 \\ |x-1| & , |x| > 1 \end{cases}$$

حل) داریم $f(-1) = f(1) = 0$ .

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \cos\frac{p}{2}x = 0$$
$$\Rightarrow$$ تابع در 1- ناپیوسته است.
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} |x-1| = 2$$

3) $f(x) = x[x]$

حل) تابع در اعداد صحیح به غیر از صفر ناپیوسته است. در صفر:

$$\lim_{x\to 0} x[x] = 0\times Q = 0 \;\; = f(0)$$

4) $f(x) = x - [x]$

حل) تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

5) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] \qquad , \qquad x\in R-\{0\}$

این تابع در نقاط به صورت $\frac{1}{n}$ که $n\in Z$ است ناپیوسته است.

6) $f(x) = \sqrt{x} - \left[\sqrt{x}\right]$ این تابع در تمام نقاطی کـه $\sqrt{x} = n$ و n عـددی طبیعـی یـا صفر است ناپیوسته است.

(7 $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\in Q \\ -x^2 & , \quad x\notin Q \end{cases}$

حل) این تابع فقط در صفر پیوسته است چون هر دنباله $\{a_n\}$ گویا یا اسم که به صفر میل کند $a_n{}^2$ , $-a_n{}^2$ نیز به صفر میل می کند.

برای سایر نقاط: اگر $x_0\in Q$ باشد $a_n=x_0+\frac{1}{n}$ در Q قرار دارد و

$$f(a_n)=(x_0+\frac{1}{n})^2 \to x_0{}^2 = f(x_0)$$

**و** $b_n=x_0+\frac{1}{\sqrt{n}}$ **در Q قرار ندارد و**

$$f(b_n)=-(x_0+\frac{1}{\sqrt{n}})^2 \to -x \neq f(x_0)$$

مشابه این تابع در اعداد اصم نیز ناپیوسته است.

(8 $f(x)=\begin{cases} x^4 & x\in[0\,,1] \\ x+1 & x\in(1,3) \end{cases}$

حل) این تابع در $x_0=1$ ناپیوسته است چون

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2 \\ f(1)=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$ تابع پیوسته نیست

توجه کنید دامنه تابع برابر $[0,3]$ است که در $x_0=1$ پیوسته نیست.

(9 $x\in[0,1]\ ,\quad f(x)=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}[2x]-\frac{1}{2}[1-2x]$

حل) داریم

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2} \quad , \quad f(1)=1 \quad , \quad f(0)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}[2x]-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[-2x]$$

$$=-x+\frac{1}{2}([2x]-[-2x])$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0-(\frac{-1}{2})=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

تابع در صفر ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)= -1+\frac{1}{2}(2-(-3))=-1+\frac{5}{2}$$

تابع در 1 پیوسته نیست

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-(-2))=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

تابع در $\frac{1}{2}$ پیوسته نیست $\Rightarrow$

9) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-4}$ ثابت کنید f روی بازه $[4,10]$ پیوسته است.

حل) چون برای هر $x\in[4,10]$ , $x-e\geq 0$ است و تابع $x-4$ پیوسته است پس f روی این بازه پیوسته است.

10) فرض کنید $f:[0,+\infty]\to R$ تابعی دلخواه باشد و $g(x)=f(|x|)$ , ثابت کنید f در نقطه 0 از راست پیوسته است اگر و فقط اگر g در نقطه 0 پیوسته باشد.

حل) فرض کنید f در 0 از راست پیوسته باشد. چون $|x|\geq 0$ است پس

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} f(|x|)=f(0)=g(0)$$

پس g در صفر پیوسته است.

اگر g در صفر پیوسته باشد. آن گاه

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = f(0)$$

پس f از راست در $0$ پیوسته است.

11) آیا معادله $x^5-18x+2=0$ ریشه ای در بازه $[-1\,,1]$ دارد؟

حل) بله اگر $f(x)=x^5-18x+2$ در نظر بگیریم:

$$\begin{matrix} f(0)=2 \\ f(1)=-15 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(0)f(1)<0 \quad \Rightarrow$$ تابع دارای ریشه است

12) ثابت کنید معادله $x^5-3x^2-x+1=0$ حداقل یک ریشه درباره $(0,2)$ دارد.

حل) $f(x)=x^5-3x^2-x+1$ را در نظر بگیرید.

حــــــــــــــــداقل یــــــــــــــــــک ریشــــــــــــــــــه دارد.

$$\begin{matrix} f(0)=1 \\ f(1)=1-3-+1=-2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(0)f(1)<0 \quad \Rightarrow$$

13) فـرض کنیـد تـابع $f:[1,2]\to[0,3]$ پیوسـته باشـد و $f(2)=3$ و $f(1)=0$

ثابت کنید عددی مانند $x_0$ در بازه $(1,2)$ موجود است که $f(x_0)=x_0$ .

حل) اگر تابع $h(x)=f(x)-x$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$h(1)=f(1)-1=0-1=-1$$
$$h(2)=f(2)-2=3-2=1$$

چـون $h(1)h(2)<0$ اسـت. پـس x در $(1و2)$ موجـود اسـت کـه $h(x_0)=0$ پـس

$$f(x_0)=x_0$$

14) فرض کنید $f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin(px)+3$ . آیا عددی مانند $x_0$ در بازه (2 و 2-)
وجود دارد که $f(x_0)=\frac{7}{3}$ ؟

حل) چون $f(2)=2+3=5$ , $f(-2)=-2+3=1$ و تابع f روی (2 و 2-) پیوسته است و $1<\frac{7}{3}<5$ پس $x_0$ وجود دارد.

15) فرض کنید تابع $f:[-1,1]\to R$ پیوسته باشد, $f(0)=0$ , $x\in[-1,1]$ , $f(x)\neq 2$ .

حل) اگر به ازای $x_0$ , $f(x_0)>2$ شود, طبق قضیه مقدار میانی تابع هر مقدار بین $f(0)=0$ , $f(x_0)$ را خصوصا مقدار 2 را می گیرد یعنی x ی وجود دارد که $f(x)=2$ . و این تناقض است. پس همواره $f(x)<2$ است.

16) فرض کنید تابع $f:[3,5]\to R$ پیوسته باشد. $f(3)=30$ , $x\in[3,5]$ , $f(x)\neq 4$ ثابت کنید $f(5)<4$ .

حل) اگر $f(5)>4$ باشد, چون تابع پیوسته است مقادیر بین $f(3)=3$ و $f(5)$ را خصوصا مقدار 4 را می گیرد , یعنی x وجود دارد که $f(x)=4$ که تناقض با فرض است. پس $f(5)<4$ است.

17) فرض کنید تابع $f:[0,3]\to R$ پیوسته باشد، $f(0)=1$ و معادله $f(x)=0$ هیچ ریشه ای دربازه $[0,3]$ نداشته باشد ثابت کنید برای هر $x\in[0,3]$ ، داریم $f(x)>0$

حل) برای $x\in[0,3]$ $[0,x]$ را در نظر بگیرید, f روی این بازه پیوسته است. چون $f(0)=1$ , اگر $f(x)<0$ باشد, حتماً f روی این بازه ریشه داردکه تناقض است،

پس همواره $f(x)>0$ .

(18) فرض کنید $f:R\to R$ , $f(0)=0$

$$f(x+y)\le f(x)+f(y)\ ,\ x,y\in R$$

ثابت کنید اگر f در نقطه 0 پیوسته باشد در هر نقطه دیگر هم پیوسته است

$$\lim_{x\to 0} f(x+a)=f(a)$$

حل) نقطه دلخواه a را در نظر بگیرید نشان می دهیم

برای $e>0$ داده شده , $d>0$ وجود دارد که

$$|x|<d \quad\Rightarrow\quad |f(x)|<e$$

$$f(x+a)\le f(x)+f(x)$$

$$\Rightarrow\quad f(x+a)-f(a)\le f(x)$$

$$\Rightarrow\quad |x|<d\quad\Rightarrow |f(x+a)-f(a)|\le|f(a)|<e$$

و این یعنی $\lim_{x\to 0} f(x+a)=f(a)$ پس f در a پیوسته است.

(19) فرض کنید I بازه ای باز باشد، تابع‌های $f,g:I\to R$ پیوسته باشد. و:

$$s(x)=Min\{f(x),g(x)\}\ \ x\in I$$

$$t(x)=Max\{f(a),g(x)\}\ \ x\in I$$

ثابت کنید s و t پیوسته اند:

حل) توابع s و t را می توان به صورت زیر نوشت:

$$s(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$t(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

با توجه به فرض پیوستگی f و g همه توابع سمت راست پیوسته اند.

(20) دو تابع مانند f و g در نظر بگیرید. آیا ممکن است؟

الف) f در نقطه a پیوسته باشد و g در نقطه a پیوسته نباشد اما fog در نقطه a پیوسته باشد.

حل) تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم

$f$ در $a=0$ پیوسته است ولی g در $a=0$ پیوسته نیست اما:

$fog(x)=1$

همه جا پیوسته است.

ب) f در a پیوسته باشد و g در a پیوسته نباشد اما fog در a پیوسته باشد.

حل) مثال قسمت الف را در نظر بگیرید اینبار $gof(x)=1$ .

ج) نه f در a پیوسته باشد ونه g اما fog در a پیوسته باشد.

حل) تمرین (6) مثال مورد نظر است

(21( الف) ثابت کنید هر چند جمله ای از درجه فرد حد اقل یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر f(x) چند جمله ای درجه فرد باشد آنگاه

حداقل یک ریشه دارد.

ب) فرض کنید $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ و $d<0$ ثابت کنید معادله $p(x)=0$ حد اقل دو ریشه متمایز دارد.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

حل) چون $f(0)=d<0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty>0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty>0$ و.

پس حد اقل ریشه در بازه $(-\infty,0)$ و یک ریشه در بازه $(0,+\infty)$ دارد.

22) فرض کنید $n$ عددی زوج باشد $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ و $a_na_0\neq 0$. ثابت کنید معادله $f(x)=0$ حداقل دو ریشع حقیقی دارد.

حل) چون $a_na_0<0$ فرض کنید $a_0<0$ و $a_n>0$. چون $n$ زوج است و $a_n>0$ پس

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_n x^n=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(a)=\lim_{x\to+\infty} a_n x^n=+\infty$$

از طرفی $f(0)=a:<0$ پس حد اقل یک ریشه حقیقی در $(-\infty\ ,\ 0)$ و یک ریشه حقیقی در $(0\ ,\ +\infty)$ وجود دارد.

## فصل سوم

# مشتق

## 17-1-3 تمرین صفحه 192

(1) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را حساب کنید.

(1 $f(x)=3x+1$

$$f'(x)=\lim \frac{3(x+h)+1-3x-1}{h}=\lim \frac{3h}{h}=3$$

(2 $f(x)=\sqrt{3x+4}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)+4}-\sqrt{3x+4}}{h}=\lim \frac{3(x+h)+4-(3x+4)}{h\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{x+4}}=3$$

$$=\lim \frac{3h}{h\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{x+4}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

(3 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x_0}{x_0^2+1}}{x-x_0}=\lim \frac{2x\,x_0^2+2x-2x_0x^2-2x_0}{(x-x_0)\,(x^2+1)\,(x_0^2)}$$

$$=\lim \frac{2x\,x_0^2+2x-2x_0x^2-2x_0}{(x-x_0)\,(x^2+1)\,(x_0^2+1)}$$

$$\lim \frac{2(1-x_0^2)}{(x_0^2+1)^2}=f'(x_0)$$

(4 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$$\lim \frac{\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x_0}{\sqrt{x_0+1}}}{x-x_0}=\frac{x\sqrt{x_0+1}-x_0\sqrt{x+1}}{(x-x_0)\ \sqrt{x+1}\,\sqrt{x_0+1}}$$

$$=\lim \frac{x-x_0}{(x-x_0)\ \sqrt{x+1}\,\sqrt{x_0+1}\,(x\sqrt{x_0+1}\ +x_0\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2(x_0+1)\ \sqrt{x_0+1}}$$

(2) با استفاده از تعریب مشتق هر یک را در نقطه داده شده حساب کنید.

(1 $f(x)=5x^2+x$

$$f'(1)=\lim \frac{5x^2+x-6}{x-1}=\lim \frac{(5x+6)\qquad (x-1)}{x-1}=11$$

(2 $x=1 \quad , \quad f(x)=\sqrt{x^2+5}$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\ =\text{`}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-1)\ (\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(3 $x=1 \quad , \quad f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$

$$f'(1)=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x+2}{2x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{(x-1)\ (2x+1)}=-\frac{1}{3}$$

(4 $x=1 \quad , \quad f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

$$f'(1)=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}}{(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2}{(x+1)\ (2x+1)}=0$$

(3) در توابع زیر اولاً، پیوستگی تـابع را در نقطـه داده شـده بررسـی کنیـد $(x=a)$ ثانیـاً $f+'(a)$ و $f-'(a)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

(1 $\quad f(x)=\begin{cases} x+2 \ , & x\le -4 \\ -x-6 \ , & x>-4 \end{cases}$ ، $x=a=4$

$x=a=4$

حل) اولاً تابع در $a=-4$ پیوسته است. ثانیاً $f+'(-4)=-1$ و $f-'(-4)=1$

(2) $\quad f(x)=\begin{cases} x^2-4 \ , \ x<2 \\ \sqrt{x-2} \ , \ x\ge 2 \end{cases} \quad , \quad a=2$

حل) اولاً تابع در $a=2$ پیوسته است. ثانیاً $f+'(2)=+\infty$ و $f-'(2)=4$

(3) $\quad f(x)=\begin{cases} 3x^2-4 \ , \ x<1 \\ x-2 \ , \ x\ge 1 \end{cases}$ , $a=2$ پیوسته است و $f+'(1)=1$ و $f-'(1)=6$

(4) اولاً ثابت کنید $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

حل) $f(0)=\lim f(x)=\lim |x|=0$ پس $f$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 2}\frac{|x|}{x}$$

پس $f_+'(0)=1$ و $f_-'(0)=-1$ است. لذا تابع صفر مشتق ندارد

ثانیاً همچنین برای هر $x \neq 0$ داریم: $f'(x)=\frac{|x|}{x}$

5) $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه داده شده مشتق پذیر باشد.

$$x=1 \quad , \quad f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ ax-b & x\geq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

حل) باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد. بنابراین $\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$$\Rightarrow \quad a+b=1$$

از طرفی داریم: $f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ a & x\geq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f_-'(1)=2 \quad = f_+'(1)=a \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a=2 \\ b=-1 \end{matrix}$$

$$x=3 \quad \text{در} \quad f(x)=\begin{cases} ax^2-3 & x<3 \\ bx-6 & x\geq 3 \end{cases} \qquad (2)$$

حل) شرط پیوستگی را نداریم: $\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

$$\Rightarrow \quad 9a+3=3b+6$$

**از طرفی داریم:** $f(x)=\begin{cases}2ax & x<3\\ b & x\le 3\end{cases}$ **پس داریم**

$$\begin{array}{l} f-'(3)=6a \\ f+'(3)=b \end{array} \Rightarrow b=6a \quad \Rightarrow 9a=18a+3$$

$$\Rightarrow -9a=3$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$b=-2$$

(6) پیوستگی و مشتق پذیری تابع $f$ را در $x=2$ تحقیق کنید اگر:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3 & x\le 2\\ 8x-11 & x>2\end{cases}$$

حل)

تابع پیوسته است $f(2)=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(8x-11)=5$

از طرفی $f'(x)=\begin{cases}4x & x\le 2\\ 8 & x>2\end{cases}$ پس $f+'(2)=f-'(2)=8$

پس تابع در 2 مشتق پذیر است.

(7) در چه نقطه ای از مخفی $y=x^3-3x+5$ ، خط مماس عمود بر $y=-\frac{x}{9}$ است.

حل) باید $y'(x)=9$ باشد پس:

$$3x^2-3=-2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(8) در چه نقطه‌ای از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 + 9 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

(9) معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x-2}$ را در نقطه $A(2\ ,\ 0)$ بیابید.

حل)

$$m = y'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}(2) = +\infty$$

پس $x = 2$ معادله خط مماس است.

## 18-1-3 **تمرین صفحه** 193

(1) مشتق پذیری هر یک از توابع داده شده را بررسی کنید.

1) $f(x)=\left|x^2-1\right| \qquad , \qquad x_0=1$

حل) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x<1\\ x^{2-1} & x\geq 1\end{cases}$ در نتیجـــــــــــــه

$f+'(1)=2$

و $f-'(1)=-2$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

(2) $f(x_0)=4x+1+\left|x-2\right| \qquad , \qquad x_0=2$

حل) مشق پذیر نیست چون

$$f(x)=\begin{cases}3x+3 & x<2\\ 5x-1 & x\geq 2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} f+'(2)=5 \\ f-'(2)=3\end{matrix}$$

(3) $f(x)=\sqrt{x^3+x^2} \qquad , \qquad x_0=0$

حل)

$$f(x)=\left|x\right|\sqrt{x+1}=\begin{cases}x\sqrt{x+1} & x\geq 0\\ x\sqrt{x+1} & x<0\end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست $\Rightarrow \begin{matrix} f+'(0)=1 \\ f-'(0)=-1\end{matrix}$

(4) $x_0=1 \qquad f(x)=\sqrt{(x-1)^2\,(x+1)}$

حل)

تابع مشتق پذیر نیست.
$$f(x)=|x-1|\sqrt{x+2}=\begin{cases}(x-1)\sqrt{x+2} & x\geq 1\\ (1-x)\sqrt{x+2} & x<1\end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad f_{+}'(1)=1 \quad , \quad f_{-}'(1)=-1\Rightarrow$$

5) $x_0=1$ $\quad f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<1\\ 4x-1 & x\geq 1\end{cases}$

حل)

تابع مشتق پذیر نیست چون $f'_{+}(1)=4$ , $f'_{-}(1)=2$ است.

6) $x=1$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ .

تابع مشتق‌پذیر نیست. $\Leftarrow$ $\infty+=f'(1)\Leftarrow$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

2)فرض کنید $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x} & x>0\\ \dfrac{1+x}{1-x} & x\leq 0\end{cases}$ . ثابت کنید $f$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

حل)

$$x>0 \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_+(0)=-1$$

تابع مشتق‌پذیر نیست. $\Rightarrow$

$$x<0 \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{(1-x)^2} \Rightarrow f'_-(0)=-2$$

(3) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}2x & x\ge 1\\ x^2+1 & x<1\end{cases}$ . ثابت کنید $f$ در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است و $f'(1)$ را حساب کنید.

حل)

$$x>0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2 \qquad f'_+(1)=2$$

پس تابع مشتق پذیر است و $f'(1)=2$ است.

$$x<0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x \qquad f'_-(1)=2$$

(4) فرض کنید $x\neq 0$ ، $f(x)=(-1)^{[x]}\frac{x-1}{x}$ . آیا $f$ در نقطه ی $x=0$ مشتق پذیر است؟

حل) زیرا این نقطه در دامنه ی تابع قرار ندارد. تابع پیوسته نیست، پس مشتق پذیر نیست.

(5) درباره ی مشتق پذیری تابع $x\in R$ و $f(x)=x[x]$ بحث کنید.

حل) این تابع در اعداد صحیح مشتق پذیر نیست، چون در این نقاط پیوسته نیست.

در نقطه ی صفر پیوسته است ولی داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[x]-0}{x-0}=\lim\limits_{x=0}[x]$

که حد اخیر وجود ندارد.

در سایر نقاط اگر $x_0=n+a$ باشد که $0<a<1$ است.

در همسایگی $x_0$ داریم $f(x)=nx$ پس $f'(x)=n$ که مشتق پذیر است.

(6) فرض کنید تابع $f$ در نقطه‌ی $a$ پیوسته باشد و $f(a)\neq 0$ . ثابت کنید. $g(x)=[x-1]f(n)$ در نقطه‌ی $a$ مشتق پذیر نیست.

حل)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|x-a|f(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|x-a|}{x-a}f(a)$$

بنابراین $f'_+(a)=f(a)$ و $f'_-(a)=-f(a)$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

(7) مقادیر $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که تابع زیر هر نقطه مشتق پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} & |x|\geq 1\\ ax^2+b & |x|<1\end{cases}$$

حل) ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\geq 1\\ -\dfrac{1}{x} & x\leq -1\\ ax^2+b & -1<x<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1'} f(x)=a+b=f(1)=1$$

$$f'_+(1)=-1=f'_-(1)=2a$$

$$\Rightarrow \quad a=-\frac{1}{2} \qquad\qquad \Rightarrow \quad b=\frac{3}{2}$$

(8) فرض کنید $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ . $f'(1)$ را حساب کنید.

حل)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=1+\frac{p}{4}$$

(9) فرض کنید $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-100)$ , $f'(0)$ راحساب کنید.

حل) چون $f(0)=0$ داریم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-100)}{x}=(-1)(-2)\ldots\ldots(-100)$$

$$=100!$$

(10) اگر $f(x)=[x]\sin x$ ، مقدار $f'\left(\frac{p}{2}\right)$ را حساب کنید.

حل) داریم

$$f'\left(\frac{p}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{p}{2}+h\right)-f\left(\frac{p}{2}\right)}{h}=\frac{\left[\frac{p}{2}+h\right]\sin\left(\frac{p}{2}+h\right)-2}{\underset{h\to 0}{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{p}{2}+h\right)-1}{h}=(\sin x)'\left(\frac{p}{2}\right)=0$$

(11) اگر برای $|x|<1$ ، $x \le f(x)\le x=x^2,$ ، مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) واضح است که $0\le f(0)\le 0$ پس $f(0)=0$ است.

$$\Rightarrow \quad 1 \le \frac{f(x)}{x} \le 1 + x$$

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'_+(0) = 1$$

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + x \le \frac{f(x)}{x} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad f'-(0) = 1$$

پس $f'(0) = 1$ است.

(12) مقدار مشتق تابع $f(x) = x|x|$ را در صفر بدست آورید.

حل) داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim |x| = 0 \qquad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

## 11-4-3 تمرین صفحه ی 247

1) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

1) $y = \sin^5 x \qquad \to \qquad y' = 5 \cos x \sin^4 x$

2) $y = (tgx + \cos x)^3 \qquad \to \qquad y' = 3(\sec^2 x - \sin x)(tyx + \cos x)$

3) $y = tg(\sin x) \qquad \to \qquad y' = \cos x . \sec^2(\sin x)$

4) $y = \sin(\sin x) \qquad \to \qquad y' = \cos x . \cos(\sin x)$

5) $y = \cos^2(\sin 3x) \qquad \to \qquad y' - 6 \sin 3x . \sin(\sin 2x0) \cos(\sin 3x)$

6) $y = 5 \sin(\cos 4x) \qquad \to \qquad y' = -20 \sin 4x \cos(\cos 4x)$

7) $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x+3} \qquad \rightarrow y'=\dfrac{-2\sin x(\cos x+3)+\sin x(2\cos x-1)}{(\cos x+3)^2}$

$$=\frac{-7\sin x}{(\cos x+3)^2}$$

8) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x-\sin x} \quad \Rightarrow \quad y'=\dfrac{\cos x(\cos x-\sin x)+\sin x(\sin x+\cos x)}{(\cos x-\sin x)^2}$

$$=\frac{1}{(\cos x-\sin x)^2}$$

9) $y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \qquad \Rightarrow y'=\dfrac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$$=\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

10) $y=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1} \qquad \rightarrow y'=\dfrac{\sec^2 x(\tan x+1)-\sec^2 x(\tan x-1)}{(\tan x+1)^2}$

$$=\frac{2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

2) در هر مورد $y'=\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

1) $x\sin y+y\sin x=xy \qquad y'=-\dfrac{\sin y+y\cos x-y}{x\cos y+\sin x-x}$

2) $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{16}$ $\qquad y'=-\dfrac{\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x}}}{\dfrac{3}{2\sqrt[3]{y}}}=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

3) $y\sqrt{x}-x\sqrt{x}=5$ $\qquad y'=-\dfrac{\dfrac{y}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{y-3x}{4x}$

4) $x^2y+\ \sin^2 y=y$ $\qquad y=\dfrac{2xy}{x^2+\sin 2y-1}$

(3) مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

1) $y=\cos^{-1}\left(7x^2\right)$ $\qquad y'=-\dfrac{14x}{\sqrt{1-49x4}}$

2) $y=\sin^{-1}(\cos 2x)$ $\qquad y'=-\dfrac{3x^2+2}{\sqrt{1-\left(x^2+2x\right)^2}}$

3) $y=\sin^{-1}(\cos 2x)$ $\qquad y'=\dfrac{-2\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^2 2x}}=-2$

4) $y=\tan^{-1}\left(x^5\right)$ $\qquad y'=\dfrac{5x^4}{1+x^{10}}$

5) $y=\tan^{-1}(\cos x)$ $\qquad y'=\dfrac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$

6) $y=\cos\left(5\cos^{-1}x\right)$ $\qquad y'=\dfrac{-\dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-25\left(\cos^{-1}x\right)^2}}$

7) $y=tg^{-1}\left(\sqrt{x+1}\right)$ $\qquad y'=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\,(x+2)}$

8) $y=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ $\qquad y=\dfrac{p}{2}$ $\qquad \Rightarrow\ y'=0$

9) $y=\cos^{-1}(\sin x)$ $\qquad y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=1$

10) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad y'=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=-\dfrac{1}{x^2+1}$

11) $x\sin y+x^2=\tan^{-1}y$ $\qquad y'=-\dfrac{\sin y+2x}{x\cos y+\dfrac{1}{1+y^2}}$

12) $y\sin^{-1}(xy)=\cos^{-1}(x+y)$

$$y'=-\frac{\dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}{\dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\sin^{-1}(xy)+\dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}$$

(4) هرگاه $f(x)=x^3+x$ ، مطلوب است محاسبه $(2)\left(f^{-1}\right)'$ .

حل)

$$y=2 \quad \Rightarrow \quad x^3+x=2 \quad \Rightarrow \quad x^3+x-2=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+2)=0$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$
$$f'(x)=3x^2+1 \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$$

(5) اگر $f$ مسافتی باشدکه متحرک درزمـان $t$ طـی مـی کنـد،مطلوب اسـت محاسـبه شتاب $a=\frac{d^2s}{dt^2}$، اگر $s=50+80t+16t^2$ باشد.

حل) $a=32$

(6) اگر $x=t+t^2$ و $y=t+t^3$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در $b=1$ محاسبه کنید.

حل)

$$x=t+t^2=f(t) \qquad f'(t)=1+2t \quad , \quad f''(t)=2$$
$$\Rightarrow$$
$$y=t+t^3=g(t) \qquad g'(t)=1+3t^2 \quad , \quad g''(t)=6t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(1)=\frac{g'(1)}{f'(1)}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}(1)=\frac{g''(1)f'(1)-f''(1)g'(1)}{(f'(1))^3}=\frac{18-8}{9}=\frac{10}{9}$$

(7) اگر $y = 3x^2 + 4x + 1$ آنگاه $\Delta y$ و $dy$ را به ازای $x = 3$ و $\Delta x = 0/1$ محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(3 + 0/1) - f(3)$$

حل)

$$= 3(3/1)^2 + 4(3/1) + 1 - 27 - 12 - 1$$
$$= 3(9/61) + 12/4 - 39$$
$$= 28/83 + 12/4 - 39 = 2/23$$

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad \Rightarrow \qquad dy = 22 \times 0/1 = 2/2$$
$$f'(x) = 6x + 4 \qquad \Rightarrow \qquad f'(3) = 22$$

(8) اگر معادله ی حرکت یک ذره $s = 20 + 30t + 3t^2$ باشد، سرعت و شتاب ذره را در $t = 2$ محاسبه کنید.

$$v = \frac{ds}{dt} = 30 + 6t \qquad \Rightarrow v(2) = 42$$
$$a = \frac{d^{2s}}{dt^2} = 6 \qquad \Rightarrow a = 6$$

(9) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ، آنگاه $\frac{dy}{dx} = y'$ را در هر مورد بیابید

1) $y = f\left(x+\sqrt{x}\right)$ $\qquad f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

$$y' = \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{2\left(x+\sqrt{x}\right)+1}{2\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)^2+\left(x+\sqrt{x}\right)}}$$

2) $y = f(\cos x + \cot x)$

$$y' = \left(-\sin x - \left(1+\cot^2 x\right)\right)\frac{2(\cos x+\cot x)+1}{2\sqrt{(\cos x+\cot x)^2+(\cos x+\cot x)}}$$

3) $y = f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\qquad \Rightarrow y = f\left(1-\dfrac{2}{x^2+1}\right)$

$$y' = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\frac{2\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^2+\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)}}$$

4) $y = f\left(f\left(x^2\right)\right)$ $\qquad \Rightarrow y' = 2xf'\left(x^2\right)f'\left(f\left(x^2\right)\right)$

$$\Rightarrow y' = 2x.\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^f+x^2}}.\frac{2\sqrt{x^4+x^2}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{x^4+x^2}\right)^2+\sqrt{x^4+x^2}}}$$

(10) معادله های خطهای مماس و قائم بر منحنی هر یک از تابع هـای بـه معادلـه ی

زیر در نقطه ای به طول یک واقع بر منحنی را بنویسید.

1) $f(x)=\left(x^2-4x\right)^3$

$y=(1-4)^3=9$

$y'=3(2x-4)(x^2-4x) \qquad \Rightarrow y'(1)=3(-2)(-3)=18$

$y-9=18(x-1) \qquad \Rightarrow y=18x-9$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2-1}$

$y=\dfrac{1+1}{2-1}=2$

$y'=2\dfrac{x(2x^2-1)-4x(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}\Rightarrow y'(1)=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

$y-2=-\dfrac{3}{2(x-1)}\Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{2}$

3) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2)^2}$

$y=\sqrt[3]{(1-2)^2}=1$

$y=(x^2-2)^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{2}{3}\times 2x(x^2-2)^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y'(1)=-\dfrac{4}{3}$

$y-1=-\dfrac{4}{3}(x-1)\Rightarrow y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{3}$

4) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$y=f(1)=1+1=2$

$y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \qquad \Rightarrow \qquad y'(1)=\mathbf{0} \Rightarrow y=2$

11) در تابع به معادله $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ اگر $y'$ و $y''$ مشقات مرتبه اول و دوم لا باشند، ثابت کنید رابطه $2y'^2-yy''=y^4$ برقرار است.

حل)

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2=\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow 2yy'=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow yy'=-xy^4 \qquad \Rightarrow \frac{y'}{y^3}=-x$$

$$\Rightarrow y\frac{y^3-3(y')^2y^2}{y^6}=-1 \qquad \Rightarrow y''y-3(y')^2=-y^4$$

$$\Rightarrow 3(y')^2-yy''=y^4$$

(12) در تابع به معادله $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ ثابت کنید $xy''+2y'=2$

حل)

$$y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$$

$$y'=1-\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{x^2}=1-y'$$

$$y''=\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow xy''=2\left(\frac{1}{x^2}\right)=2(1-y') \qquad \Rightarrow xy''+2y'=2$$

(13) فرض کنید $: R \to R$ $f,g$ تابع های مشتق پذیر باشند و $0 \neq g'(0)$ و $f(0)=g(0)=0$ ثابت کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

حل)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-0}{x-0}}{\frac{g(x)-0}{x-0}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

(14) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & x\leq 0\\ \frac{5}{2}x^2-4x & x>0\end{cases}$ تابع مشتق تابع را پیدا کنید.

حل)

$$f'(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 0\\ 5x-4 & x>0\end{cases}$$

15) فرض کنید. $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ (1-x)(2-x) & 1\le x\le 2\\ -(2-x) & x>2\end{cases}$ تابع مشتق تابع را بیابید.

حل)

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & x<1\\ 2-x-(1-x) & 1\le x\le 2\\ +1 & x>2\end{cases}$$

16) مشتق هر یک را تعیین کنید.

1) $y=\dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow y=\tan x.x^{-\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow y'=\sec^2 x.x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}.\tan x$$

2) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\dfrac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}$

$$=\frac{-1}{1+\sin x}$$

$$3)\quad y=\sqrt{Arc\cot\frac{x}{2}}\quad\Rightarrow y'\frac{\dfrac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{Arc\cot\frac{x}{2}}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-1}{\left(4+x^2\right)\sqrt{Arc\cot\frac{x}{2}}}$$

$$4)\quad y=Arc\tan\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$y'=\frac{1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)}$$

$$5)\quad y=Arc\sin\frac{1}{|x|}\quad\Rightarrow y'=\begin{cases}Arc\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ -Arc\sin\dfrac{1}{x} & x<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & x>0\\[2ex] \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x<0\end{cases}$$

6) $\sin xy + \cos xy = 0 \quad \Rightarrow y' = -\dfrac{y\cos xy - y\sin xy}{x\cos xy - x\sin xy} = -\dfrac{y}{x}$

7) $x\ y = Arctg\,\dfrac{x}{y} \qquad \Rightarrow y\tan(xy) - x = 0$

$$\Rightarrow y' = -\frac{y^2\sec^2(xy) - 1}{\tan(xy) + xy\sec^2(xy)}$$

8) $x - y = Arc\sin x - Arc\cos y$

$Arc\sin x - Arc\cos y - x + y = 0$

$$y' = -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 1}$$

(17) فرض کنید $f(x) = \sin(n\,Arc\sin x)$ . ثابت کنید.

$$(1-x^2)f''(x) - x\ f'(x) + n^2 f(x) = 0$$

حل) $Arc\sin$ را دو طرف اثر می دهیم:

$$Arc\sin\ f(x) = n\ \ Arc\sin x \qquad \textbf{مشتق} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(f'(x))^2}{1-(f(x))^2} = \frac{n^2}{1-x^2} \qquad \Rightarrow (1-x^2)(f'(x))^2 = n^2(1-f^2(x))$$

$$\text{مشتق} \quad \Rightarrow 2(1-x^2)f''(x)f'(x) - 2x(f'(x))^2 = -2n^2 f'(x)f(x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)f''(x)-x(f'(x))+n^2 f(x)=0$$

(18) فرض کنید $x\in R$ $f(x)=[x]\sin^2 px$ . تابع مشتق $f$ رابیابید.

حل) چون $\lim_{x\to n}\sin^2 px=0$ برای هر $n$ صحیح در تمام نقاط پیوسته است.

(19) فرض کنید $f(x)=\left|\left(x^{2-1}\right)^2(x+1)^3\right|$ تابع مشتق $f$ رابیابید.

حل)

$$f(x)=\left|\left(x^2-1\right)^2(x+1)^2(x+1)\right|$$

$$=\left(\left(x^2-1\right)^2(x+1)^2(x+1)\right)^2 \mid x+1$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=2\left(2x(x+1)+\left(x^2-1\right)\right)\left(\left(x^2-1\right)(x+1)\right)\mid(x+1)\mid$$

$$+\left(\left(x^2-1\right)(x+1)\right)\frac{|x+1|}{x+1}$$

(20) فرض کنید $f:R\to R$ ، $n$ مرتبه مشتق پذیر باشد. ثابت کنید.

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$$

حل) با استقرا روی $n$ این مطلب را نشان می دهیم:

$$n=1 \qquad \Rightarrow (f(ax+b))'=af'(ax+b)$$

$$k=n \qquad \Rightarrow (f(ax+b))^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$$

با مشتق گیری از دو طرف فرض داریم:

$$[f(ax+b)]^{(n+1)} = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b)$$

پس حکم برقرار است.

(20) در هر مورد مشتق مرتبه $n$ام تابع داده شده را به دست آورید.

$$1)\quad y=\sin x \quad \Rightarrow\ y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$2)\quad y=\cos x \quad \Rightarrow\ y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$3)\quad y=\sin^2 x \ \Rightarrow\ y^{(n)}=\sin 2x\left(x+n\frac{p}{2}\right)\ \Rightarrow\ y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left(2x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$4)\quad y=\cos^2 x \quad \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{1}{2}\times 2^n\cos\left(2x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{p}{2}\right)$$

$$5)\quad y=\frac{1+x}{1-x} \qquad y'=\frac{-2}{(1-x)^2}\quad,\quad y''=\frac{4}{(1-x)^3}$$

$$y'''=\frac{-12}{(1-x)^4}\quad,\quad y^{(4)}=\frac{48}{(1-x)^5}$$

$$\ldots\ldots y^{(n)}=(-1)^n\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(22)مقادیر $c,b$ را طوری تعیین کنید که نمودار $y=x^2+bx+c$ در نقطه $A(1,1)$ بر خط $y=x$ مماس باشد.

حل) (1 , 1) روی نمودار قرار داردپس $1=1+b+c$

از طرفی شیب برابر 1 است پس داریم $1=2+b$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ \\ b=-1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad c=1$$

23) در چه نقاطی از منحنی $y=x^3+x-2$ خط مماس بر منحنی موازی حط $y=4x-1$ است؟

حل) باید $y'(x)=4$ باشد پس

$$3x^2+1=4 \quad \Rightarrow 3x^2=3 \quad \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

24) معادله ی مماس بر منحنی $y=x^3+3x^2-5$ را بنویسید که بر خط $2x-6y+1=0$ عمود باشد.

حل) $$6y=2x+1 \quad \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$$

پس شیب خط داده شد برابر $\frac{1}{3}$ است لذا شیب خط مماس برابر $-3$ است پس

$$3x^2+6x=-3 \Rightarrow x^2+2x+1=0$$
$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=-3$$
$$y'(-1)=3-6=-3 \Rightarrow y+3=-3(x+1) \Rightarrow y=-3x-6$$

25) در مورد تابع $f:R\rightarrow R$ میدانیم $|f(x)|\leq x^2, x\in R$ ثابت کنید $f$ در $x=0$ مشتق پذیر است $f'(0)$ رابیابید.

حل)

$$f(x)|\leq x^2 \Rightarrow \ | f(x) \leq | x|^2 \quad \Rightarrow \quad -|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$$

$$\Rightarrow \ |\frac{f(x)}{x} \leq | x|$$

**از طرفی داریم:** $\lim(-1x1) = \lim 1x1 = 0$ **پس**

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f-(x)-0}{x-0} = f'(0) = 0$$

26) در مورد تابع $f : R \to R$ می دانیم $|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq -1x1 \Leftarrow$ $\quad |x| \geq \left|\frac{f(x)}{x}\right|$ آیـا

می توانیم نتیجه بگیریم که $f$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است؟

حل) خیر؛ مثلاً $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید این تابع در $x = 0$ مشتق ندارد.

27)اگر $f(x) = [x]\sin x$ مقدار $f'\left(\frac{p}{4}\right)$ را حساب کنید.

حل) چون $0 < \frac{p}{4} < 1$ است پس $f\left(\frac{p}{4}\right) = 0$

$$f'\left(\frac{p}{4}\right) = \lim_{x\to\frac{p}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{p}{4}\right)}{x - \frac{p}{4}} = \lim_{x\to\frac{p}{4}} \frac{[x]\sin x}{x - \frac{p}{4}} = 0$$

(28اگـــــر $f : R \to R$ یـــــک تـــــابع و $f'(a)$ موجـــــود باشـــــد، حاصـــــل

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ را حساب کنید.

حل)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$
$$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)$$

29) اگر به ازای $|x|<1$ , $x\le f(x)\le x+x^2$ مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) با توجه به نا مساوی داریم: $0\le f(0)<0$ پس $f(0)=0$ .

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

**زیرا** $1\le\dfrac{f(x)}{x}\le 1+x$

30) اگر $f(a)=0$ , $f'(a)=4$ , $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{5h}$ را حساب کنید.

حل)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}=\frac{2}{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}$$
$$=\frac{2}{5}f'(a)=4\Rightarrow f'(a)=10$$

31) اگر $f$ بـر $R$ دو مرتبـه مشـتق پـذیر باشـد و $g(x)=f(xf(x))$ آنگـاه $g''(0)$ را

حساب کنید.

حل)قرار دهید:

$$
\begin{aligned}
&u(x)=xf(x)\Rightarrow u(0)=0\\
&u'(x)=f(x)+xf'(x)\Rightarrow u'(0)=f(0)\\
&g(x)=f(u)\Rightarrow g'(x)=u'\ \ f'(u)\\
&g''(x)=u''f'(u)+(u')^2 f''(u)\\
&\Rightarrow g''(0)=2f'(0)f'(0)+(f(0))^2 f''(0)\\
&\Rightarrow g''(0)=2(f'(0))^2+(f(0))^2 f''(0)
\end{aligned}
$$

**۳۲)اگر توابع $f$ و $g$ بر $R$ مشتق پذیر باشند و**

$$2g'(-2)=f(a)=f'(a)=-2$$

مقدار $(g\circ f)'(a)$ را حساب کنید.

حل)

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)'(a)&=g'(f(a)).f'(a)\\
&=g'(-2).(-2)=(-1)(-2)=2
\end{aligned}
$$

(33) اگر $\begin{cases} x=(t+2)^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ مقدار $\dfrac{dy}{dx}$ را به ازای $t=3$ حساب کنید.

***حل)***

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2(t+2)}\Rightarrow\frac{dy}{dx}(3)=\frac{27}{2\times 5}=\frac{27}{10}$$

(34) اگر $f'(1)=f(1)=-2$ و $g'(-2)=3$ ، حاصل $(g\circ f)'(1)$ را حساب کنید.

***حل)***

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)$$
$$=g'(-2)\cdot(-2)=3\times(-2)=-6$$

(35) اگر $f$ تابعی مشتق پذیر در $a$ باشد. مقدار $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ را حساب کنید.

حل) مقدار $xf(x)$ را به صورت اضافه و کم کنید:

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-xf(x)+xf(x)-af(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)\frac{x-a}{x-a}-\lim_{x\to a} x\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=f(a)-af'(a)$$

(36) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری بـه معادلـه $\begin{cases}x=t^2-1\\ y=\sqrt{t^2+1}\end{cases}$ در $t=2$ را حساب کنید.

حل)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d_y}{d_t}}{\frac{d_x}{d_t}}=\frac{2t}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}$$
$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}(2)=\frac{4\times\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$$

# فصل چهارم

# کاربرد مشتق

14-2-4 تمرین صفحه 290

(1) ابتدا نشان دهید که هریک از توابع زیر دربازه داده شده در شرایط قضیه رل صدق می کند. پس مقدار $c$ مربوطه را بدست آورید.

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ و $x \in [-1 , 2]$

حل) چند جمله ای ها روی هر بازه شرایط قضیه رل را دارند. چون مشتق پذیرند و مشتق آنها نیز چند جمله ای است.

$$f(2) = f(-1) = 0$$
$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 4c - 1 = 0$$
$$c = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

2) $f(x) = x^3 - 16x$ و $x \in [-4 , 0]$

حل :

$$f(-4) = -64 + 64 = 0 = f(0)$$
$$f'(c) = 3c^2 - 16 = 0 \Rightarrow c = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

3)
$$x \in [0 , 4] , \; f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

پس تابع روی $[0 , 3]$ پیوسته و روی $(0 , 3)$ مشتق پذیر است.

$$f(0)=0=f(3)=3\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=0$$
$$\Rightarrow \frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{c^{\frac{2}{3}}}=\frac{4c-3}{3c^{\frac{2}{3}}}=0$$
$$\Rightarrow c=\frac{3}{4}$$

4) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}\ ,\ x\in[0\ ,\ 4]$

حل:

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$$

پس تابع $f$ روی $[0\text{و}4]$ پیوسته و روی $(0\text{و}4)$ مشتق پذیر است.

$$\frac{3}{4}c^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}c^{-\frac{3}{4}}=0$$
$$\frac{3}{4c^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2c^{\frac{3}{4}}}=\frac{3c^{\frac{1}{2}}-2}{4c^{\frac{3}{4}}}=0$$
$$\Rightarrow c=\frac{4}{9}$$

5) $x\in[-3\ ,\ 7]\ ,\ f(x)=\begin{cases}x+3\rightarrow x\leq 2\\ 7-x\rightarrow x>2\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}1\ \rightarrow x\leq 2\\ -1\rightarrow x>2\end{cases}$$

حل) این تابع در 2 پیوسته است، پس همه جا پیوسته است و پس در 2 مشتق پذیر نیست. لذا شرایط را ندارد.

6) $x\in[-3\ ,\ 4]\ ,\ f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{x-3}$

حل) تابع در $3\in[-3\ ,\ 4]$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه را ندارد.

7) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6\ ,\ x\in[2\ ,\ 3]$

حل)

$$f(2)=8-24+22-6=0$$
$$f(3)=27-54+33-6=0$$
$$f'(c)=3c^2-12c+11=0$$
$$c=\frac{12\pm\sqrt{12}}{24}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{12}$$

8) $f(x)=(x-p)\sin x\ ,\ \in[0\ ,\ p]$

حل) چند جمله ای و $\sin x$ همه جا پیوسته و مشتق پذیرند.

$$f(0)=0=f(p)$$
$$f'(c)=\sin c+(c-p)\cos c=0$$
$$\Rightarrow \sin c=(p-c)\cos c$$
$$\Rightarrow \tan c=p-c$$
$$\Rightarrow c+\tan c=p$$

واضح است که $c=p$ جواب دراین بازه است.

9) $f(x)=\begin{cases}x^2-9\rightarrow x<2\\ 5x-4\rightarrow x\geq 2\end{cases}\rightarrow x\in[-3\ ,\ 4]$

حـــــل) ایـــــن تــــابع در $2\in[-3$ و $4]$ پیوســـــته نیســـــت چـــــون

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim(x^2 - 9) = -5 \neq f(2) = 6$$

پس شرایط قضیه برقرار نیست.

10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \ , \ x \in [-2 \ , \ 4]$ .

حل) این تابع در $1 \in [-2 و 4]$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه برقرار نیست.

(2) اگر $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ باشد، به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ در بازه $(0 و 1)$ حداقل یک ریشه دارد.

حل)
$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$$

تابع چند جمله ای در قضیه رل صدق می کند، پس در $(0 و 1)$ حداقل یک $c$ وجود دارد که

$$f'(c) = 4c^3 - 6c^2 + 4c - 1 = 0$$

(3) به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله $x^3 + 2x + c = 0$ ، که در آن $c$ یک ثابت دلخواه است، نمی تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

حل) اگر $f(x) = x^3 + 2x + c$ بیش از یک ریشه داشته باشد $f'(x) = 3x^2 + 2$ حداقل یک ریشه دارد که تناقض است.

4) با استفاده از قضیه رُل ثابت کنید معادله $f(x) = 0$ و $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3$ دقیقا یک ریشه در بازه $(0 و 1)$ دارد.

حل) $f(0)f(1)<0$ پس $f(0)=-3$ و $f(1)=1$ طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک ریشه در $(0,1)$ دارد. از طرفی $f'(x)=5x^4+3x^2+2>0$ .

چون $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس $f(x)$ دقیقا یک ریشه دارد.

5) ابتدا نشان دهید توابع داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کنند. سپس مقدار $c$ مربوطه را بدست آورید.

1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\ ,\ x\in[0\ ,\ 1]$ .

حل) $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

پس $f$ روی $[0\ ,\ 1]$ پیوسته و روی $(0\ ,\ 1)$ مشتق پذیر است.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$
$$\Rightarrow c=\frac{8}{27}$$

2)

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}\ ,\ x\in\left[\frac{3}{2}\ ,\ 3\right]$$

حل) تابع داده شده روی $\left[\frac{3}{2}\ ,\ 3\right]$ پیوسته روی $\left(\frac{3}{2}\ ,\ 3\right)$ مشتق پذیر است،

$$f'(c) = -\frac{1}{(c-1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{f(3) - f(\frac{3}{2})}{3 - \frac{3}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow (c-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = 0$$

3)

$x \in [-1 و 5]$

$$\begin{cases} 2x+3, x<3 \\ 15-2, x \geq 3 \end{cases}$$

حل) تابع در 3 مشتق پذیر نیست، چون $f'_-(3) = 2$ و $f'_+(3) = -2$ ، پس شرایط قضیه را ندارد.

4) $f(x) = 3(x-4)^{\frac{2}{3}}$ ، $x \in [-4 \ , \ 5]$ .

حل) $f'(x) = 2(x-4)^{-\frac{1}{3}}$ ، $f$ در $4 \in [-4 و 5]$ مشتق پذیر نیست، پس شرایط برقرار نیست.

5) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+3}$ ، $x \in [-5 \ , \ 0]$ .

تابع در $-3 \in [-5 \ , \ 0]$ پیوسته نیست پس شرایط قضیه برقرار نیست.

6) $f(x) = x^2 + 7x - 1$ ، $x \in [-1 \ , \ 5]$ .

حل) چون $f$ چند جمله ای است، شرایط برقرار است. پس

$$2c+7=\frac{f(5)-f(-1)}{6}=\frac{49-7}{6}=7$$
$$\Rightarrow c=0$$

(6) نشان دهید هر چند جمله ای از درجه 3 حداکثر 3 ریشه حقیقی دارد.

حل) چون مشتق چندجمله ای درجه 3، چندجمله ای درجه 2 است و حداکثر 2 ریشه دارد پس چندجمله ای درجه 3 حداکثر 3 ریشه دارد.

(7) نشان دهید معادله $x^5+3x^3+x+13=0$ دارای بیش از یک ریشه حقیقی نیست.

حل) چون درجه چند جمله ای فرد است، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

از طرفی $f'(x)=5x^4+9x^2+1$ هیچ ریشه ای ندارد، پس چند جمله ای داده شده، دقیقا یک ریشه دارد.

(8) نشان دهید معادله $x^{2n+1}+ax+b=0$ برای $n\in N, a>0$ دقیقا یک ریشه دارد.

حل) چون چندجمله ای از درجه فرد است، حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+a$ و $a>0$ ، پس $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد، پس معادله دقیقا یک ریشه دارد.

(9) نشان دهید $x^5+x^3+x+1=0$ دقیقا یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x)=5x^4+3x^2+1$ هیچ ریشه ای ندارد پس معادله دقیقا یک ریشه دارد.

(10) نشان دهید

$$\frac{x}{1+x}<Ln(1+x)<x \quad \text{و} \quad (x>0)$$

حل) تابع $f(t)=Ln(1+n)$ را روی بازه $[0,x]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه

مقدار میانگین را دارد. پس:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$0<c<x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+c}=\frac{Ln(1+x)}{x}$$
$$c<x\Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}=\frac{Ln(1+x)}{x}\Rightarrow \frac{1}{1+x}<Ln(1+x)$$
$$0<c\Rightarrow \frac{1}{1+0}=1>\frac{1}{1+c}=\frac{Ln(1+x)}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1+x}<Ln(1+x)<x$$

(11) نشان دهید.

$$(x>0),\frac{1}{1+x}<Ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$$

حل) کافی است در تمرین قبل به جای $x$ قرار دهیم $\frac{1}{x}$ داریم:

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}<Ln(1+\frac{1}{x})$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+x}<Ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$$

(12) اگر $f$ بر بازه بسته $[0, 1]$ پیوسته و $f(0)=0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه بسته باز $(0, 1)$ موجود و صعودی باشد، نشان دهید که $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0, 1)$ صعودی است.

حل) برای $0<x<1$ طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(cx)$$

$$0<x_1<x_2<1\Rightarrow cx_1\le cx_2$$

$f'$ صعودی است $f'\Rightarrow f'(cx_1)\le f'(cx_2)$

$g$ صعودی است $\Rightarrow g(x_1)\le g(x_2)\Rightarrow g$

(13) فرض کنید $f'(x)=\frac{x}{1+x^2}$ . ثابت کنید به ازای هر $a$ و $b$ متمایز داریم:

$$\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{1}{2}|b-a|$$

حل)

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\le 1-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

از طرفی $2x^2\le(1+x^2)^2$ پس $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\ge\frac{1}{2}$ . لذا

$$f'(x)\le 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

حال اگر $a$ و $b$ متمایز و دلخواه باشد.

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=|f'(c)|\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{2}|b-a|$$

(14) اگر $0<b\le a<\frac{p}{2}$ باشد، نشان دهید که:

$$\frac{a-b}{\cos^2 b} \le \tan a - \tan b \le \frac{a-b}{\cos^2 a}$$

حل) تابع $f(x) = \tan x$ را روی بازه $[b \text{ و } a]$ در نظر بگیرید.

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس:

$$\frac{\tan a - \tan b}{a-b} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

چون $b < c < a$ و $\frac{1}{\cos^2 x}$ تابعی صعودی است. پس

$$\frac{1}{\cos^2 b} \le \frac{1}{\cos^2 c} \le \frac{1}{\cos^2 a}$$

لذا

$$\frac{1}{\cos^2 b} \le \frac{\tan a - \tan b}{a-b} \le \frac{1}{\cos^2 a}$$

(15) درستی قضیه مقدار میانگین را برای تابع زیر در فاصله $[2 \text{ و } 0]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, x > 1 \end{cases}$$

حل) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$ پس تابع همه جا خصوصـا روی $[0 \; , \; 2]$ پیوسـته اسـت. از طرفی:

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 1 \;,\; f'(x) = \begin{cases} -x, 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, x > 1 \end{cases}$$

پس مشتق $f$ همه جا خصوصا روی $(0\ ,\ 2)$ موجود است. لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

(16) ثابت کنید که معادله $x = 2^{-x}$ یک و تنها ریشه در بازه $(0\ ,\ 1)$ دارد.

حل) از $x = 2^{-x}$ نتیجه می گیریم $Log_2 x = -x$

حال تابع $f(x) = Log_2^x + x$ را روی فاصله $(0\ ,\ 1)$ در نظر بگیرید.

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$$ $f$ ریشه ای در $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)$ دارد.

از طرفی $f'(x) = \frac{1}{Ln2}\cdot\frac{1}{x} + 1$ هیچ ریشه ای ندارد. پس $Log_2^x = x$ دقیقا یک ریشه دارد، لذا $x = 2^{-x}$ دقیقا یک ریشه در $(0\ ,\ 1)$ دارد.

(17) قضیه رل را بیان کرده با استفاده از آن نشان دهید که معادله $x^3 + x - 1 = 0$ یک و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر $f$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی $(a,b)$ مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b)$ آنگاه $c \in (a,b)$ موجود است که $f'(c) = 0$ .

چون معادله داده شده از درجه فرد است پس حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = 3x^2 + 1$ هیچ ریشه ای ندارد، پس طبق قضیه رل $f(x)$ نمی تواند بیش از یک ریشه داشته باشد.

(18) با استفاده از قضیه رل ثابت کنید بین هر دو ریشه حقیقی معادله $e^x \sin x = 1$ حداقل یک ریشه $e^x \cos x = -1$ قرار دارد.

حل) $e^x \sin x = 1$ معادل است با $\sin x = e^{-x}$ . و $e^x \cos x = -1$ معادل است با $\cos x = -e^{-x}$ .

حال تابع $f(x) = \sin x - e^{-x}$ را در نظر بگیرید. این تابع شرایط قضیه رل را داراست و $f'(x) = \cos x + e^{-x}$ .

بنابراین بین هر دو ریشه $f'(x)$ وجود دارد.

یعنی بین هر دو ریشه $\sin x = e^{-x}$ یک ریشه از $\cos x = -e^{-x}$ وجود دارد.

(19) با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید. $0 < x \le 1$ $Ln(\frac{x+1}{x}) \ge \frac{1}{a+1}$ .

حل) طبق تمرین (11) برای $x > 0$ داریم $Ln(\frac{x+1}{x}) > \frac{x}{x+1}$ است.

حال اگر $0 < x \le 1$ آنگاه $\frac{x}{x+1} \le \frac{1}{1+x}$ بنابراین:

$$\frac{x}{x+1} \le Ln(\frac{x+1}{x})$$

(20) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی $a \ge 1$ رابطه زیر برقرار است. (به شرط آنکه $0 < (z+1)$ باشد).

اگر $z \ge 0$ $(1+z)^a \ge 1 + az$

حل) تابع $f(x) = (1+x)^a - ax$ را روی فاصله $[0 \; z]$ در نظر بگیرید

ایـن تـابع شـرایط قضـیه مقـدار میـانگین را داراسـت. پـس $0 < c < z$ موجـودات کـه

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = f'(c) \Rightarrow \frac{(1+z)^{a} - az - 1}{z} = a(1+c)^{a-1} - a \geq 0$$

چون $c > 0$ است پس $(1+z)^{a} \geq 1 + az$

اگر $z < 0$ تابع $f(x) = (1+x)^{a} - ax$ را روی $[z و 0]$ در نظر می گیریم

$$\frac{f(0)-f(z)}{0-z} = f'(c)$$

$$\frac{1-(1+z)^{a} + az}{0-z} = (1+c)^{a} - a \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 + az \leq (1+z)^{a}$$

(21) با استفاده از قضیه رل نشان دهید که مشتق تابع $f(x) = x^{4} - 8x^{2} - 12x$ فقـط یک ریشه در $[-1 و 1]$ دارد.

حل)

$$f'(x) = 4x^{3} - 16x - 12$$

$$f''(x) = 12x^{2} - 16$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^{2} = \frac{16}{12} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt[2]{3}}$$

ریشه های $f''(x)$ خارج $[-1 و 1]$ قرار دارند پس $f'(x)$ حداکثر یک ریشـه در $[-1 و 1]$ دارد.

از طرفی $f'(-1) = -4 + 16 - 12 = 0$ و این تنها ریشه تابع مشتق است.

(22) ثابت کنید که تـابع $f(x) = 4x^{5} + 3x^{3} + 3x - 2$ در فاصـله $[0 , 1]$ تنهـا یـک ریشه دارد.

حل) $f(0) = -2 < 0\ ,\ f(1) = 8 > 0$ پس حداقل یک ریشه در $[0\ ,\ 1]$ دارد. از طرفی:

$$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3 > 0$$

$f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس $f(x)$ دقیقا یک ریشه دارد.

(23) فرض کنید $f(x)$ روی $[0\ ,\ 1]$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید عددی مانند $c\ ,\ 0 < c < 1$ وجود دارد به طوری که $c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$

حل) تابع $h(x) = x^2 f(x)$ را روی فاصله $[0 و 1]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست پس:

$$0 < c < 1\ ,\ \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(c)$$
$$0 < c < 1\ ,\ \frac{f(1) - 0}{1} = c^2 f'(c) + 2cf(c)$$
$$\Rightarrow c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$$

4-3-8 تمرین صفحه 300 .

(1) تعیین کنید توابع زیر روی چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

1) $f(x) = -x^5 - 4x + 2$

$$f'(x) = 5x^4 - 4 = -(5x^4 + 4) < 0$$

$f$ همواره نزولی است.

2) $f(x) = x^4 - 2x^2$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

تابع روی $[1 + \infty)$ تابع صعودی روی $[0\ ,\ 1]$ نزولی

روی $[-1\ ,\ 0]$ تابع صعودی و روی $(-\infty\ ,\ -1]$ نزولی است.

3) $$f(x)=\frac{-x+2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(x-1)^2-2(x-1)(-x+2)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(-x+1+2x-4)}{(x-1)^4}=\frac{(x-3)}{(x-1)^3}$$

تابع روی $(1\ ,\ 3)$ نزولی و روی $(3\ ,\ +\infty)$ و $(-\infty\ ,\ 1)$ صعودی است.

4) $$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

تابع روی $\left(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\right)$ صعودی و روی $\left(-2\ ,\ -\sqrt{2}\right)$ و $\left(\sqrt{2}\ ,\ 2\right)$ نزولی است.

5) $$f(x)=[x]$$

تابع جزء صحیح همه جا صعودی است.

6) $$f(x)=|x|-|x+1|$$

$$f(x)=\begin{cases}1\rightarrow x<-1\\ -2x-1\rightarrow -1\le x<0\\ -1\rightarrow 0\le x\end{cases}$$

7) $$f(x)=x+\cos x$$

$$f'(x)=1-\sin x\ge 0$$

همواره صعودی است.

8) $$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

تابع روی $(-1\ ,\ 1)$ صعودی و روی $(-\infty\ ,\ -1)$ و $(1\ ,\ +\infty)$ صعودی است.

9) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<0$$

تابع همواره نزولی است. چون $\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ .

10) $f(x)=2x+\frac{1}{2x}$

$$f'(x)=2-\frac{1}{2x^2}=\frac{4x^2-1}{2x^2}$$

تابع روی $\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ نزولی و روی $\left(\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right)$ و $\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ صعودی است.

11) $f(x)=x\sqrt{5-x^2}$

$$f'(x)=\sqrt{5-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}=\frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

تـــابع روی $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,\ \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ صـــعودی و روی $\left(-\sqrt{5}\ ,\ -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ و $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,\ \sqrt{5}\right)$ نزولی است.

12) $f(x)=2-(x-1)^{\frac{1}{3}}$

همواره نزولی است $f'(x)=-(x-1)^{-\frac{2}{3}}<0\Rightarrow$

13) $f(x)=x^3(x-2)^2$

$$f'(x)=3x^2(x-2)^2+2x^3(x-2)=x^2(x-2)(3x-6+2x)=x^2(x-2)(5x-6)$$

تابع روی $\left(-\infty \text{و} \frac{6}{5}\right)$ و $(2 \text{و} +\infty)$ صعودی و روی $\left(\frac{6}{5} \text{و} 2\right)$ نزولی است.

(14

$$f(x) = \cos^2 x + \cos x - 2$$
$$f'(x) = -\sin 2x - \cos x = -\cos x(2\sin x + 1)$$
$$= -2\cos x(\sin x + \frac{1}{2})$$

تابع نزولی $\mathbf{0} < x < \frac{p}{2} \Rightarrow f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع صعودی $\frac{p}{2} < x < p \Rightarrow f'(x) > \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع نزولی $p < x < \frac{7p}{6} \Rightarrow f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع صعودی $\frac{7p}{6} < x < \frac{3p}{2} \Rightarrow f'(x) > \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع نزولی $\frac{3p}{2} < x < \frac{11p}{6} \Rightarrow f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع صعودی $\frac{11p}{6} < x < 2p \Rightarrow f'(m) > \mathbf{0} \Rightarrow$

(2) با فرض $\mathbf{0} < x < \frac{p}{2}$ ، نامساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x < x$ .

حل) تابع $f(t) = \sin t$ را روی $[\mathbf{0} \ , \ x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد پس.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\cos c<1\Rightarrow \sin x<x$$

ب) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$

حل) تابع $f(t)=\sin t+\frac{t^3}{6}$ را روی فاصله $[0\ ,\ x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\Rightarrow \frac{\sin x+\frac{x^3}{6}}{x}=\cos c+\frac{c^2}{3}>1\Rightarrow \sin x>x-\frac{x^3}{6}$$

(3) نشان دهید.

$(x>0)$

$$\frac{x}{1+x^2}<\mathrm{Arc}\tan t<x$$

حل) تابع $f(t)=\mathrm{Arc}\tan t$ را روی بازه $[0\ ,\ x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\Rightarrow \frac{\mathrm{Arc}\tan x-0}{x}=\frac{1}{1+c^2}$$

چون $0<c<x$ پس $\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+c^2}<1$ لذا داریم:

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{\mathrm{Arc}\tan x}{x}<1\quad\Rightarrow\quad \frac{x}{1+x^2}<\mathrm{Arc}\tan x<x$$

(4) با فرض $f(x)=x-Ln(1+x)$ و $0<x<1$ نشان دهید.

$$\frac{x^2}{4} < x - Ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

حل) تابع $f(t) = t - Ln(1+t)$ و $g(t) = t^2$ روی $[0, x]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را دارند، پس داریم:

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{x - Ln(1+x)}{x^2} = \frac{1-\frac{1}{1+c}}{2c} \Rightarrow \frac{x-Ln(1+x)}{x^2} = \frac{c}{1+c}/2c$$

$$\frac{x-Ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$

از طرفی چون $0 < c < x < 1$ لذا داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2(1+c)} < \frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{x-Ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} < x - Ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

(5) نشان دهید: $(x > 0)\ \frac{x}{1+x} < Ln(1+x) < x$

حل) به تمرین صفحه 292 مراجعه کنید.

(6) نامساوی زیر را ثابت کنید: $\frac{2}{p}x < \sin x < x, 0 < x < \frac{p}{2}$

حل) نامساوی $\sin x < x$ در تمرین 2 قسمت الف نشان داده شد.

برای $x > 0$ تابع $f(t) = \sin t - \frac{2}{p}t$ را روی فاصله $\left[x, \frac{p}{2}\right]$ در نظر بگیرید، این تابع

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد.

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(x)}{\frac{\pi}{2}-x}\ f'(c)\Rightarrow\frac{0-(\sin x-\frac{2}{\pi}x)}{\frac{\pi}{2}-x}=\cos c-\frac{2}{\pi}\Rightarrow\frac{\sin x-\frac{2}{\pi}x}{\frac{\pi}{2}-x}=\frac{2}{\pi}-\cos c$$

(7) اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد نشان دهید: $\tan x+\sin x>2x$ .

(8) فرض کنید تابع $f$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و $f''$ در فاصله $(a,b)$ همواره موجود و مثبت باشد. نشان دهید.

$$\forall x,y\in[a,b]:\ f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

(9) اگر $f$ در بازه $[0,1]$ پیوسته و $f(0)=0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه $(0,1)$ موجود و صعودی باشد. نشان دهید که $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0,1)$ صعودی است.

حل) به تمرین 12 صفحه 292 مراجعه کنید.

نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x)=4x^4+4x^3$

$$f'(x)=16x^3+12x^2=4x^2(4x+3)=0$$

$$\Rightarrow \left\{0,-\frac{3}{4}\right\}=\text{نقاط بحرانی}$$

2) $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+4}$

$$f'(x)=\frac{-x^2-4+2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}=0$$

$$\Rightarrow \{-2,2\}=\text{نقاط بحرانی}$$

3) $f(x)=\sin^2 x-\sin x$

$$f'(x)=\sin^2 x-\cos x=0$$

$$\Rightarrow \cos x=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{kp+\frac{p}{2},2kp+\frac{p}{6},2kp+\frac{5p}{6}\right\}=\text{نقاط بحرانی}$$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & -\frac{3}{2}\le x<2 \\ -x+3 & 2\le x\le 5\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & -\frac{3}{2}\le x<2 \\ -1 & 2\le x\le 5\end{cases}$$

تابع در $x=2$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. پس $x=2$ نقطه بحرانی است.

5) $f(x) = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{7x^2 + 4x - 3}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0 \rightarrow 7x^2 + 4x - 3 = 0$$

پس نقاط بحرانی $\left\{0, -1, \frac{3}{7}\right\} \Rightarrow$

6) $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)}$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow x = 0, 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad = 2, -1$$

به ازای $x = 2$ مشتق موجود است پس

نقاط بحرانی $\{0, -1\} \Rightarrow$

7) $f(x) = \frac{(x+1)}{(x^2 - 5x + 4)}$

حل)

$$D_f = R - \{1, 4\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4 - 2x^2 - 2x + 5x + 5}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

$$\Rightarrow \quad -x^2 - 2x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \Rightarrow$$ نقاط بحرانی

8) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 2$

$$D_f = [0, +\infty]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x-4}{2x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \quad = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

نقطه بحرانی

4-3-21 تمرین صفحه 313

با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیـر را تعیین کنید.

1)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = -6 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

2)

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos x$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{p}{4}, \frac{3p}{4}$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$x = \frac{p}{4} \Rightarrow f''(\frac{p}{4}) - \cos(\frac{p}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = \frac{3p}{4} \Rightarrow f''(\frac{3p}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ مینیمم نسبی

3)

$$f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$$
$$f'(x) = -12x^2 + 6x + 18 = -6(2x^2 - x - 6) = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow x = 2, x = -\frac{3}{2}$$

$$f''(x) = -24x + 6$$
$x = 2 \Rightarrow f''(2) < 0 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow f''(-\frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

4)

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$$
$$f'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x-3) \Rightarrow x = 0, x = 3$$
$$f''(x) = 12x - 18$$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = 3 \Rightarrow f''(0) = 18 > 0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

5)

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} = 2(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}) = 2(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}) = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f''(x) = -x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}}$$

$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

6) $f(x) = (x-3)^4 \Rightarrow$ $f$ در $x = 3$ مینیمم نسبی دارد.

7)

$$f(x)=(x-4)^2\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[0,+\infty]$$

$$f'(x)=2(x-4)\sqrt{x}+(x-4)^2\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x(x-4)+(x-4)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow x=4, x=\frac{4}{5}$$

$$f''(x)=\frac{2\sqrt{x}(10x-24)-\frac{1}{\sqrt{x}}(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}}=\frac{2x(10x-24)-(x-4)(5x-4)}{2x}$$

$$f''(4)=\frac{8\times 16}{8}=16>0 \Rightarrow$$ $f$ در 4 مینیمم نسبی

$$f''(\frac{4}{5})=\frac{\frac{8}{5}\times(-4)}{\frac{8}{5}}<0 \Rightarrow$$ $f$ در $\frac{4}{5}$ ماکزیمم نسبی

8)

$$f(x)=\frac{9}{x}+\frac{x^2}{9}$$

$$f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{2x}{9}=\frac{-81+2x^3}{9x^2}=0 \Rightarrow x^3=\frac{81}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{81}{2}}$$

مینیمم نسبی

$$f''(x)=\frac{18}{x^3}+\frac{2}{9} \Rightarrow f''(\sqrt[3]{\frac{81}{2}})>0 \Rightarrow$$

# فصل پنجم

# ضد مشتق

9-2-5 تمرین صفحه 350

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید:

الف)
$$\int (3x-2)^4 dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)^4 3dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^5}{5}+c$$

ب)
$$\int \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}dx = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c$$

ج)
$$\int x^2\sqrt{1+x}dx$$

قرار دهید $u^2 = 1+x$ پس $2udu = dx$

$$\int (u^2-1)^2 2u^2 du = 2\int (u^6-2u^4+u^2)du$$
$$=2(\frac{u^7}{7}-\frac{2u^5}{5}+\frac{u^3}{3})+c$$
$$=2(\frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3})+c$$

د)
$$\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$$
$$u^2 = x^2-1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Rightarrow udu = xdx$$
$$\int (u^2+1)udu = \frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}+c = \frac{(x^2-1)^2}{4}+\frac{x^2-1}{2}+c$$

ه)
$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$$

$$u=\sqrt{x}\Rightarrow 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}\Rightarrow 2\int (u-1)^2du=\frac{2}{3}(u-1)^3+c$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^3+c$$

و)
$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^6}}=-\frac{1}{6}\int\frac{-6x^5}{\sqrt{1-x^6}}dx=-\frac{1}{6}\times 2\sqrt{1-x^6}+c$$
$$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6}+c$$

ز)
$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}$$
$$u^2=1+x^2\Rightarrow udu=xdx$$
$$\int\frac{udu}{\sqrt{1+(u^2-1)u^3}}=\int\frac{udu}{\sqrt{1-u^3+u^5}}$$

ح)
$$\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+2)^3}=\int\frac{(x+1)dx}{((x+1)^2+1)^3}$$
$$u=(x+1)^2+1\Rightarrow\frac{du}{u^3}=\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times\frac{1}{u^2}+c=-\frac{1}{4((x+1)^2+1)^2}+c$$

ط)
$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx;u=2\sin x\Rightarrow du=2\cos xdx$$
$$\frac{1}{4}\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx=\frac{1}{4}\int\cot^2 x\cdot\csc^2 xdx=-\frac{1}{12}\cot^3 x+c$$

ی)

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx$$

$$u=x^3+3x+1 \Rightarrow \frac{du}{3}=(x^2+1)dx$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+c=\frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}+c$$

ک)

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$$

$$u^3=1-x \Rightarrow -3u^2du=dx$$

$$-3\int(1-u^3)^2u^3du=-3\int(u^3-2u^6+u^9)du$$

$$=-3(\frac{u^4}{4}-\frac{2u^7}{7}+\frac{u^{10}}{10})+c$$

$$=-3(\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{2(1-x)^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{(1-x)^{\frac{10}{3}}}{10})+c$$

ل)

$$\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}+c$$

م)

$$\int x\sqrt[5]{5-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt[5]{5-x^2}(-2x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}(5-x^2)^{\frac{6}{5}}+c$$

(2) فرض کنید $f(x)=|x|$ و تابع $F$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2, & x\geq 0\end{cases}$$

نشان دهید $F$ یک ضدّ مشتق $f$ روی $(-\infty,+\infty)$ است.

حل)

$$F'(x)=\begin{cases}-x & , \quad x<0\\ x & , \quad x\geq 0\end{cases}=f(x)$$

13-3-5 تمرین صفحه 355 .

انتگرال $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$ را حل کنید.

حل)

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^4 x}+\int\frac{dx}{(\sin x\cos x)^2}$$

$$=\int \sec^4 xdx+4\int\frac{dx}{(\sin 2x)^2}=\int\sec^2 x(1+\tan^2 x)dx+4\int\csc^2 2x$$

$$=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}-2\cot 2x+c$$

20-3-5 تمرین صفحه 357 .

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

1)

$$\int\tan^4 xdx=\int\tan^2 x(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\int\tan^2 x\sec^2 xdx-\int(\tan^2 x+1)dx+\int dx$$

$$=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+c$$

2)

$$\int\tan^6 xdx=\int\tan^2 x\cdot\tan^4 xdx=\int(\sec^2 x-1)\tan^4 xdx$$

$$=\int\tan^4 x\cdot\sec^2 xdx-\int\tan^4 xdx$$

$$=\frac{\tan^5 x}{5}-\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-x+c$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^9 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^9 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$$
$$= -\frac{1}{8\sin^8 x} + \frac{1}{6\sin^6 x} + c$$

(3

$$\int \sec^4 x \cdot \cot^6 x dx = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^6 x} dx = \int \frac{\sec^2 x(1+\tan^2 x)}{\tan^6 x} dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^6 x} dx + \int \frac{\sec^2 x}{\tan^4 x} dx = -\frac{1}{5\tan^5 x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + c$$

(4

5) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^9 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^9 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos^9 x}dx$$
$$= \frac{1}{8\cos^8 x} - \frac{1}{6\cos^6 x} + c$$

6) $$\left|\csc^4 x.\cot^7 xdx - \right|\csc^2 x(\cot^2 x - 1)\cot^7$$
$$= \int \cot^9 x.cse^2 xdx - \int \cot^7 x.cse^2 xd\,x$$
$$= -\frac{\cot^{10} x}{10} + \frac{\cot^8 x}{8} + c$$

7) $$\int \cos x \sec^2(\sin x)dx = \int \frac{\sin x \cot x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}dx = -\frac{1}{2\cos x} + c$$

8) $$\int \sin^3 2x.\cos^5 2x\,dx = \int \sin 2x(1-\cos^2 2x)\cos^5 2x\,dx$$
$$= \int \cos^5 2x.\sin 2x\,dx - \int \cos^7 2x.\sin 2x\,dx$$
$$= -\frac{1}{12}\cos^6 2x + \frac{1}{16}\cos^8 2x + c$$

9) $$\int \frac{\tan x(1+\tan x)^{10}}{\cos^2 x}dx = \left|u(1+u)^{10}du\right.$$
$$\left(u = \tan x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x}\right)$$
$$= \int \left((u+1)^{11} - (u+1)^{10}\right)du = \frac{(\tan x + 1)^{12}}{12} - \frac{(\tan x + 1)^{11}}{11}$$

$$10)\qquad \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x + 2\cos + 1} = \int \frac{\sin x\,dx}{(\cos x + 1)^2}$$

$$(u = \cos x + 1 \quad \Rightarrow \quad -du = \sin x\,dx)$$

$$= -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\cos x + 1} + c$$

(2) فرض کنید $In = \left|\tan^n x\,dx\right.$ . یک فرمول بازگشتی برای محاسبه $In$ بیابید, $I_4$ و $I_6$ را محاسبه کنید.

حل)

$$In = \int \tan^{n-2} x \,.\, \tan^2 x\,dx = \int \tan^n x\left(\sec^2 x - 1\right)dx = \tan x$$

$$= \int \tan^{n-1} x \,.\, \tan^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\left(\sec^{n-2} x - 1\right)dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}6 + c$$

$$\Rightarrow \qquad In + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} + c$$

$$I_2 = \int \tan^3 x\,dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)dx = \tan x - x$$

$$I_4 = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

$$I_6 = \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$$

(3) معادله دسته منحنی هایی رابیابید که ضریب زاویهخطوط مماس در هر نقطـه $(x, y)$

از آن برابر $-\frac{\bar{x}}{y}$ باشد.

حل)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \qquad ydy=-xdx$$

$$\Rightarrow \qquad \int ydy=-\int xdx+c$$

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}=c \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2=2c$$

معادله دسته مخفی‌ها، دوایر بر مرکز مبدأ مختصات است.

(4) معادله مخفی را بیابید که از نقطه $(2\ ,\ 9)$ گذشته و معادله ضریب زاویه مماس برخی $3x^2$ باشد.

$$y=3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y=\int 3x^2dx+c$$

$$y=x^3+c$$

$$9=8+c \qquad \Rightarrow \qquad c=1$$

$$y=x^3+1$$

حل)

(5) معادله $y'-2x=0$ را حل کنید.

$$y'=2x \ \Rightarrow \qquad y=\int 2x+c$$

$$\Rightarrow \qquad =x^2+c$$

حل)

(6) مشتق تابعی برابر $\sqrt{x+3}$ است. هرگاه مقدار به ازای $x=1$ برابـر 1 باشـد, تـابع را بیابید.

$$y'=\sqrt{x+3} \quad \Rightarrow \quad y=\int\sqrt{x+3}+c$$
$$\Rightarrow \quad y=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}\ +\ c$$
$$(1\ ,\ 1) \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{2}{3}\times 4\times 2\times c \ \Rightarrow \quad c=-\frac{13}{3}$$
$$y=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} \quad -\frac{13}{3}$$

حل)

(7) هر یک از انترالهای زیر را حل کنید.

1) $$\int\frac{\sin x\ dx}{(1+\cos x)^2}=-\frac{1}{1+\cos x}+c$$

$$\int\cos^6 x\ dx=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2\ x)^3\ dx$$

2) $$=\frac{1}{8}\int\left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)\ dx$$
$$=\frac{1}{8}\left(\int dx+3\int\cos 2x\,dx+\frac{3}{2}\int(1+\cos 4x)dx+\int\cos 2x\left(1-\sin^2 2x\right)\ dx\ \right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{6}\right)+c$$

3) $$\int\sin^5 x\cos^2 x\,dx=\int\sin x\left(1-\cos^2 x\right)^2\cos^2 x dx$$
$$=\int\sin x\ .\ \cos^2 x\ dx-2\int\sin x\ .\ \cos 4x\ dx+\int\sin x\ .\ \cos^6 x\ dx$$
$$=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{\cos^7 x}{7}+c$$

4) $$\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}}\,dx = \int \cos 3x\left(1-\sin^2 3x\right)\sin^{-\frac{1}{3}} 3x\,dx$$

$$= \int \sin^{-\frac{1}{3}} 3x \;.\; \cos 3x\,dx - \int \sin^{\frac{5}{3}} x \;.\; \cos 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{\frac{2}{3}} 3x + \frac{1}{8}\sin^{\frac{8}{3}} 3x + c$$

5) $$\int \sin 3y \,\cos 3y\; dy = \frac{1}{6}\sin^2 3y + c$$

6) $$\int \cos t \;.\; \cos 3t\; dt = \frac{1}{2}\int\left(\cos 2t + \cos t\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t + c$$

7) $$\int \sin x \;.\; \sin 3x \;.\; \sin 5x = \int \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos x\right)\sin 5x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x \,.\, \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 5x \,.\, \cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin\frac{7}{2}x + \sin\frac{3}{2}x\right)dx - \frac{1}{2}\int\left(\sin 3x + \sin 2x\right)dx$$

$$= \frac{-1}{7}\cos\frac{7}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

8) $$\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x\cos x)^4 dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin^4 2x\ dx = \frac{1}{32}\int (1-\cos 4x)^2$$

$$= \frac{1}{32}\int \left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx$$

$$= \frac{1}{32}\left( x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x \right) + c$$

9) $$\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\ .\ \sin(x-1)\cos(x-1)dx$$

$$\left( u = 1+\sin^2(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{2} = \sin(x-1)\cos(x-1)dx \right)$$

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ \ du = \frac{1}{3}u\sqrt{u} + c = \frac{1}{3}\left(1+\sin^2(x-1)\right)\sqrt{1+\sin^{2(x-1)}} + c$$

10) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x\ .\ \sin^2 x} = 4\int \frac{dx}{(2\sin x\cos x)^2} = 4\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2\cot 2x + c$$

11) $$\int \sqrt{-+\sin^2(x-1)}\qquad .\ \sin(x-1)\cos(x-1)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left( \cos\frac{13}{4}x + \cos\frac{7}{4}x + \cos\frac{11}{4}x + \cos\frac{9}{4}x \right)dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left( \frac{4}{13}\sin\frac{13}{4} + \frac{4}{7}\sin\frac{7}{4}x + \frac{4}{11}\sin\frac{11}{4}x + \frac{4}{9}\sin\frac{9}{4}x \right) + c$$

12) $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 3x}dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 x}dx$

$= \frac{1}{3}\tan 3x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} + c$

13) $\int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)}}$ $\qquad u = \sin x - \cos x \Rightarrow du = (\cos x + \sin x)_{dx}$

$= \int \frac{dy}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + c$

14) $\int x^{n-1}\sin x^n dx$ $\qquad u = x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{n} = x^{n-1}\, dx$

$= \frac{1}{n}\int \sin u\, du = -\frac{1}{n}\cos x^n + c$

15) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} \quad = \int \sin x \frac{1-\cos x^n x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} \quad dx$

$= \int \cos^{-\frac{3}{5}} x \,.\, \sin x\, dx - \int \cos^{\frac{13}{5}} x \,.\, \sin x\, dx$

$= -\frac{5}{2}\cos^{\frac{2}{5}} x + \frac{5}{18}\cos^{\frac{18}{5}} x + c$

16) $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)2}dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{1+\cos x} + c$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$ $\quad , \quad u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$I = 2\int \frac{du}{\sin^2 u} = -2\cot(\sqrt{x}) + c$

18) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}, \qquad u = x^2 \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2}\tan x^2 + c$$

19) $\int \sin x (1+\cos x)^5\,dx = -\int u^5 du = -\frac{(1+\cos x)^6}{6} + c$

20) $\int \sin 2x\sqrt{2+\sin^2 x}\;\,dx = \int \sqrt{u}\;\,du = \frac{2}{3}(1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x} + c$

# فصل ششم

# انتگرال معین

6-1-7 تکریم صفحه 364

با استفاده تعریف حد, انتگرال تابع $f(x)=x^2$ را در فاله $[0\ ,\ 1]$ بیابیید.

حل)

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \lim \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6-2-2 تمرین صفحه 366.

در شی تساوی‌های زیر ثالث کنید.

الف)

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

حل) اگر $\{x_0\ ,\ x_1\ ,\dots ,\ x_8\}$ افرازی از $[a\ ,\ b]$ باشدآنگاه $\Delta y_i = \Delta x_i$ برای بازه $[b\ ,\ a]$ به کار می‌رود پس

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{D}_i)\Delta x_i = -\lim \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{D}_i)\Delta y_i$$

$$= \int_b^a f(x)\, dx$$

ب)

$$\int_b^a f(x)\, dx = 0$$

حل) طبق خاصیت الف)

$$\int_a^a f(x)\, dx = -\int_a^a f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int_b^a f(x)\, dx = 0 \qquad \Rightarrow \int_b^a f(x)\, dx = 0$$

6-2-5 تمرین صفحه 368

قضیه $6-2-4$ . فرض کنید $f$ در بازه‌ای شامل نقاط $c\ ,b\ ,a$ پیوسته باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

اثبات) اگر $a<c<b$ ، اثبات تساوی از قفضیه $6-2-3$ حاصل می‌شود.

بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $a<c<b$ .

$$\Rightarrow \quad \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$
$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

6-2-7. تمرین صفحه 369

قضیه 6-2-4. اگر $f$ و $g$ بر $[a\ ,b]$ پیوسته باشد و برای ره $x\in[a\ ,\ b]$ ،

$f(x)\ge g(x)$ آنگاه $\int_a^b f(x)\ fx \ge \int_a^b g(x)\ fx$

اثبات.

$$f(\mathbf{D}_i) \ \ge\ g(\mathbf{D}_i) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{D}_i)\,\Delta x_i \ge g(\mathbf{D}_i)\,\Delta x_i$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} f(\Im_i)\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} g(\Im_i)\Delta x_i$$
$$\Rightarrow \quad \lim \sum_{i=1}^{n} f(\Im_i)\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} g(\Im_i)\Delta x_i$$
$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx \ \ge\ \int_a^b g(x)\ dx$$

(2) **اگر** $f$ **بر** $[a\ ,\ b]$ انتگرال پذیر باشد و برای هر $x$ در فاصله $[a\ ,\ b]$ ،

$f(x) \geq 0$ انگاه $\int_a^b f(x)bx \geq 0$

اثبات : طبق قضیه $4-2-6$ داریم

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b 0\, dx = 0$$

(3) اگر $f$ روی $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a\ ,\ b]$ ، $0 < f(x)$ انگاه:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

حل)

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b 0\ dx = 0$$

12-2-6 تمرین صفحه 371.

(1) حد $\lim_{n \to +\infty} 8\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+....+\frac{n^2}{n^3}\right)$ را به صورت یک انتگرال معین بنویسید.

حل)

$$= 8 \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=n}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = 8\int_0^1 x^2 dx$$

حد

(2) حد $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2}$ را به صورت انتگرال معین بنویسید.

حل)

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2} = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \bullet \frac{n^2}{i^2} = \lim \frac{n}{i^2} = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . \frac{n}{(\frac{i}{n})}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$$

(3) با استفاده از تعریف انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف)

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx$$

حل)

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_0^1 \, dx = 2\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right) = 2\lim \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$
$$= 2 \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = 1$$

ب)

$$J = \int_3^5 [x]\, dx$$

حل) می‌دانیم $\int_a^b k dx = k(b-a)$ پس

$$J = \int_3^4 [x]\, dx + \int_4^5 [x]\, dx = \int_3^4 3dx + \int_4^5 4\, dx$$
$$= 3(4-3) + 4(5-4) = 3 + 4 = 70$$

(4) اگر تابع $f$ روی $[a \ , \ b]$ انتگرال پذیر باشد. ثابت کنید که:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

حل) چون برای هر $x \in [a \ , \ b]$ داریم: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ طبق قضیه

6-2-6 داریم:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

پس

$$\left|\int_a^a f(x)\,dx\right| \le \int_a^b f(x)\,dx$$

(5) فاصله‌هایی را معین کنید که مقدار انتگرال‌های داده شده در آن فاصله قرار گیرد.

الف)

$$\int_{-2}^{1} (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

حل) تابع $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$ روی $[-1,1]$ صعودی است پس

$$\max f(x) = f(1) = 2\sqrt{2}$$
$$\max f(x) = f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \le 2\sqrt{2}\,(2-(-1))$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \int_{-2}^{1} (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx \le 6\sqrt{2}$$

ب)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$$

حل) تابع $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}$ روی $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ است، چون ترکیب دو تابع صعودی است پس

$$\max\ f(x)=1$$

$$\min\ f(x)=\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}}\times\frac{\pi}{2}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\le\frac{\pi}{2}$$

ج)

$$\int_1^4 |x-2|\,dx$$

$$\max |x-2|=|4-2|=2$$
$$\min |x-2|=|2-2|=0$$

$$\Rightarrow \qquad 0\le\int_1^4 |x-2|\,dx\le 6$$

د)

$$\int_{-5}^{2}\frac{x+5}{x-3}dx$$

حل) $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$ نزولی است پس

$$\max\ f(x)=f(-5)=0$$
$$\min\ f(x)=f(2)=-7$$

$$\Rightarrow \qquad -49\le\int_{-5}^{2} f(x)\,dx\le 0$$

(6) بدونه محاسبه انتگرال نشان دهید $\int_0^1 x^2dx \le \int_0^1 x\,dx$ و $\int_0^1 x\,dx\le\int_1^2 x^2\,dx$

حل) تابع $f(x)=x-x^2$ را در نظر بگیرید داریم:

$$0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; f(x) \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge x^2 \;\Rightarrow\; \int_0^1 x\,dx \ge \int_0^1 x^2\,dx$$

$$0 \ge 1 \;\Rightarrow\; f(x) \le 0 \;\Rightarrow\; x \le x^2 \;\Rightarrow\; \int_0^2 x\,dx \le \int_0^2 x^2\,dx$$

(7) اگر $f$ روی $[-1\,,2]$ پیوسته باشد نشان دهید:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{-1} f(x)\,dx = 0$$

حل) داریم:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x) + \int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{2} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx - \int_{1}^{0} f(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{-1} f(x)dx = 0$$

(8) اگر $f$ بر $[a\;,\;b]$ پیوسته و $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ ، نشان دهید حداقل عددی نظیر $a$ در فاصله $[a\;,\;b]$ قرار دارد به طوری که $f(x) = 0$ .

حل) طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\min\; f(x) \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le \max\; f(x)$$

$$\min\; f(x) \le \rightarrow \quad \bullet \quad \leftarrow \le \max\; f(x)$$

پس

حال طبق قضیه مقدار میانی $a$ وجود دارد که $f(a) = 0$ باشد.

(9) مثالی از یک تابع چنان ارائه دهید که ناپیوسته و قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ما

الف) برقرار نباشد. ب) برقرار باشد.

حل ب) تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0 \quad \Rightarrow \frac{\int_{-1}^{1} f(x)dx}{2}=0=f(0)$$

(10) اگر $f$ روی $[-1\ ,\ 4]$ انتگرال‌پذیر باشد و مقدار متوسط تـابع $f$ روی $[-1\ ,\ 4]$ برابر $3$ باشد، مقدار $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ را بدست آورید.

حل)

$$\frac{\int_{-1}^{4} f(x)\,dx}{5}=3 \qquad \Rightarrow \int_{-1}^{4} f(x)\,dx=15$$

تمرین صفحه 378 $6-3-13$

1) فرض کنید $f$ بر $[-a\ ,\ a]$ پیوسته و فرد باشدو ثابت کنید: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

حل)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &=\int_{a}^{0} f(-x)\,(-dx)+\int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=0\end{aligned}$$

2) در تمرین 1 اگر $f$ زوج باشد, ثابت کنید که:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

3) انتگرالهای زیر را حل کنید:

الف)

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\,dx$$

اگر قرا دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $du = -dx$ و داریم

$$I = \int_{\frac{p}{2}}^{0} \frac{\sqrt{\sin}}{\sqrt{\sin u} + \sqrt{\cos u}}(-du) = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}}\,du$$

$$I + I = 2I = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}}\,du + \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}}\,du$$

$$= \int_{0}^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{p}{2}$$

ب)

$$I = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x}\,dx$$

حل) اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $du = -dx$ و داریم:

$$I=-\int_{\frac{p}{2}}^{0}\frac{\cos^m u}{\cos^m u+\sin^m u}dx=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\cos^m u}{\cos^m u+\sin^m u}du$$

$$I+I=2I=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\sin^m u}{\sin^m u+\cos^m u}du+\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\cos^m u}{\cos^m u+\sin^m u}du=\int_0^{\frac{p}{2}}du=\frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad I=\frac{p}{4}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$F(t)=\int_{-2}^{\sqrt{t}}\frac{\sin x}{1+\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$F'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}.\frac{\sin\sqrt{t}}{1+\sqrt{1+t}}$$

ب)

$$F(t)=\int_a^g f(x)\,dx$$

$$F'(t)=g'(t)\,f\,(g(t))$$

ج)

$$F(t)=\int_{-x}^{x}|t|\,dt$$

$$F(x)=2\int_0^x tdt \qquad \Rightarrow \qquad F'(x)=2x$$

د)

$$F(x)=\int_{-x}^{x}\frac{dt}{3+t^4}$$

$$F(x)=2\int_0^x\frac{dt}{3+t^4} \qquad \Rightarrow \qquad F'(x)=\frac{2}{3+t^4}$$

(5) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}$$

(6) در توابع ضمنی زیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید.

الف)

$$\int_0^y \cos^2 t dt + \int_0^x \sin^2 t dt = 0$$

حل)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin^2 t dt}{\frac{d}{dx}\int_0^y \cos^2 t dt} = -\frac{2x\sin^2 x^2}{\cos^2 y}$$

ب)

$$\int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z}\ dz + \int_0^y \cos t dt = 0$$

حل)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3-2\sin^2 z}\ dz}{\frac{d}{dy}\int_0^y \cos t dt} = -\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$$

(7) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

حل) قرار می‌دهیم: $u = x - \frac{p}{2}$ پس $du = dx$ و

$$I = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\left(u+\frac{p}{2}\right)\cos u}{1+\sin^2 u} du$$

$$= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{u\cos u}{1+\sin^2 u} du + \frac{p}{2}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1+\sin^2 u} du$$

$$= p\int_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1+\sin^2 u}\,du = p \quad Arc\tan(\sin u)\Big|_{0}^{\frac{p}{2}}$$

$$= \frac{p^2}{4}$$

(8) فرض کنید K عددی صحیح باشد ثابت کنید: $I=\int_0^{p}\frac{\sin 2kx}{\sin x}=dx=0$

حل) قرار می دهیم $u=x-\frac{p}{2}$ پس du=dx و

$$I=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin 2k(u+\frac{p}{2})}{\sin(u+\frac{p}{2})}du=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin(2ku+p)}{\cos u}du$$

$$=-\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{\sin 2ku}{\cos}du=0$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است.

(9) اگر در انتگرال $I=\int_0^{2p}\frac{dx}{5-2\cos}$ تغییر متغیر x=2t را به کار ببریم داریم

$$I=\int_0^{2p}\frac{dx}{5-2\cos}=\int_0^{0}\frac{2dt}{(1+t^2)(5-\frac{1+t^2}{1-t^2})}=0$$

واضح است که نتیجه درست نیست زیرا $\frac{1}{5-2\cos}>0$، مورد اشتباه را بیابید.

حل) با تغییر x=2t بازهٔ $[0,2p]$ به $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ برده می شود که در حل مورد استفاده قرار نگرفته است.

(10) فرض کیند f(x) دلخواه باشد، ثابت کنید: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^{a}[f(x)+f(-x)]dx$

حل) تابع f(x) را می توان به صورت $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

نوشت که $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ زوج و $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ فرد است. پس

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx + \int_{-a}^{a} \frac{f(x)-f(-x)}{2}dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx + 0 = \int_{0}^{a} (f(x)+f(-x))dx$$

(11)انتگرال $I = \int_{0}^{2p} f(x)\cos x dx$ را با تغییر متغیر t=sinx تغییر دهید.

$$t = \sin x \Rightarrow x = Arc\sin t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$I = \int_{0}^{1} f(Arc\sin t)dt + \int_{1}^{0} f(Arc\sin t)dt + \int_{0}^{-1} f(Arc\sin t)dt + \int_{-1}^{0} f(Arc\sin t)dt$$

(12) درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$

حل) اگر قرار دهیم u=a+b-x آنگاه du=-dx و u(b)=a , u(a)=b است، پس داریم:

$$\int_{a}^{b} f(a+b-x)dx = -\int_{b}^{a} f(u)du = \int_{a}^{b} f(u)du = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

ب) $\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)dx = \int_{0}^{t} g(x)f(t-x)dx$

حل) قرار دهید u=t-x پس du=-dx و u(t)=0 , u(0)=t پس داریم:

$$\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)dx = -\int_{t}^{0} f(t-u)g(u)du$$

$$= \int_{0}^{t} g(u)f(t-u)du = \int_{0}^{t} g(x)f(t-x)dx$$

ج) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$

حل) اگر قرار دهیم $u = \frac{\pi}{2} - x$ پس $du = -dx$ , $u(0) = \frac{\pi}{2}$ , $u(\frac{\pi}{2}) = 0$ لذا داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^m (\frac{\pi}{2} - u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$$

(13) با توجه به مسأله 12 (ج) انتگرال های $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ را محاسبه کنید.

حل) طبق مسأله قبل داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

(14) درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

حل)

اگر قرار دهیم $u = \frac{\pi}{2} - x$ آنگاه $du = -dx$ , $u(0) = \frac{\pi}{2}$ , $u(\pi) = -\frac{\pi}{2}$ پس

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(\cos u) du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u) du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

علت آخری این است که f(cosu) تابعی زوج است.

ب) $$\int_0^p xf(\sin x)dx = \frac{p}{2}\int_0^p f(\sin x)dx$$

حل)

اگر قرار دهیم $u=\frac{p}{2}-x$ داریم $u(p)=-\frac{p}{2}\ ,\ u(0)=\frac{p}{2}\ ,\ du=-dx$ ، لذا

داریم:

$$\int_0^p xf(\sin x)dx = -\int_{\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{2}}(\frac{p}{2}-u)f(\sin(\frac{p}{2}-u) = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{p}{2}f(\cos u))du$$

$$=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}uf(\cos u)du = p\int_0^{\frac{p}{2}}f(\cos x)dx$$

چون تابع $f(\cos a)$ فرد و تابع $f(\cos u)$ زوج است.

(15) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_0^p\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$$

حل)

$$I=\int_0^p\sqrt{\sin^2 x}dx=\int_0^p\sqrt{\sin x}dx$$

$$=-\cos\Big|_0^p=2$$

(16) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف) $$\int_{-L}^{L}\cos\frac{mp}{L}xdx=2\int_0^L\cos\frac{mp}{L}x\,dx=\frac{2L}{mp}\sin\frac{mp}{L}x\Big|_0^L=0$$

ب) $\int_{-L}^{L} \sin \frac{mp}{L} x dx = 0$ تابع فرد است

ج) $\int_{-L}^{L} \cos \frac{mp}{L} x = \sin \frac{mp}{L} x dx = 0$ چون تابع فرد است.

(17) اگر $F(x) = \int_0^x u du$ , $G(x) = \int_1^x t dt$ ثابت کنید $F(x) - G(x) = \frac{1}{2}$

حل)

$$F(x) = \int_0^x u du$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \int_1^x u du$$

(18) درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}) = \frac{1}{2}$

حل)

$$\text{حد} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n})$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}(\frac{i}{n}) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

ب) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots \frac{n}{n^2+n^2}$

حل)

$$\text{حد} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \ldots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{p}{4}$$

$$\frac{2}{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{p}{n} + \sin\frac{2p}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)p}{n}\right)$$

ج)

حل)

$$\text{حد} = \frac{1}{p}\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{p}{n}\sin p\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{p}\int_0^p \sin x dx = -\frac{1}{p}\cos x \Big|_0^p = \frac{2}{p}$$

(19) فرض کنید $B(m,n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$. اولاً تساوی B(m,n)=Bn,m) را ثابت کنید، ثانیاً ثابت کنید که

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} x . \cos^{2n+1} x dx$$

.

حل) اولاً اگر قرار دهیم u=1-x پس $du = -dx$ , $u(0) = 1$ , $u(1) = 0$ پس داریم:

$$B(m,n) = -\int_1^0 (1-u)^m u^n du = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = (n,m)$$

ثانیاً: اگر قرار دهیم $x = \sin^2 t$ آنگاه $dx = 2\sin t \cos dt , (1-x) = \cos^2 t$ و کرانها به $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ تبدیل می شود. پس داریم:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m} t . \cos^{2n} t . 2\sin t \cos dt = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} t . \cos^{2n+1} t dt$$

(20) با فرض $y = 2\sin q \,,\, x = 6\cos q$ ، مطلوب است، محاسبهٔ $I = \int_3^6 xy\,dx$

حل) $dx = -6\sin q\; dq$ ، اگر $x = 3$ آنگاه $q = \frac{p}{6}$

اگر $x = 6$ آنگاه $q = 0$

$$\Rightarrow I = \int 6\cos q . 2\sin q . (-6\sin q)dq = 72\int \sin^2 q . \cos q dq = \frac{72}{3}\sin^3 q \Big|_0^{\frac{p}{6}} = 24(\sin^3\frac{p}{6} - 0) = \frac{24}{8} = 3$$

# فصل هفتم

# تــو ابــع غیر جبری

27ـ 7 تمرین صفحهٔ387

مشابه آنچه در تعریف $\sin^{-1}$ بیان شد، تابع $\cos^{-1}$ را تعریف و سپس ثابت کنید

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

حل) تابع y=cosx روی $[0,p]$نزولی است پس وارونه پذیر است

$$Cosx:[0,p]\to[-1,1]$$

$$Cos^{-1}x:[-1,1]\to[0,p]$$

برای محاسبه مشتق داریم: $y=\cos^{-1}x\Leftrightarrow x=\cos y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7ـ2ـ25. تمرین صفحهٔ.394

1ـــ ثابــت کنیــد هرگــاه $0\le x\le 1$ , $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{p}{2}$ در مــورد $-1\le x\le 0$

تساوی بالا چگونه بیان می شود؟

حل)

$$y=\sin^{-1}x\Rightarrow x=\sin y=\cos(\frac{p}{2}-y)\Rightarrow\cos^{-1}x=\frac{p}{2}-y$$

$$\Rightarrow y+\cos^{-1}x=\frac{p}{2}\Rightarrow\sin^{-1}x+\cos^{-1}=\frac{p}{2}$$

این تساوی برای هر $-1\le x\le 1$ برقرار است.

2ـ $y=\sin^{-1}\frac{1}{2}$ مفروض است، مطلوب است:

Cscy , secy , coty , tany , cosy

حل) توجه کنید $y = \frac{p}{6}$

$$\cos y = \cos\frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan y = \tan\frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot y = \cot\frac{p}{6} = \sqrt{3} \quad , \quad \sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc y = \frac{1}{\sin y} = 2$$

(3) در تمرین های زیر مقدار دقیق کمیت داده شده را پیدا کنید.

الف)

$$tg(\sec^{-1}(\frac{5}{3}) + \csc^{-1}(-\frac{13}{12})) = tg(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13})) = \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}$$

$$= \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5})\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13})) + \sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} - \frac{5}{13}\times\frac{12}{13}}{\frac{3}{5}\times\frac{5}{13} - \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}} = \frac{\frac{12}{25} - \frac{60}{169}}{\frac{15}{65} - \frac{48}{65}}$$

ب)

$$\sin(\cos^{-1}(-\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(-\frac{1}{3})) = \sin(p - \cos^{-1}(\frac{2}{3}) - 2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) = \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(\frac{1}{3}))$$

$$= \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\cos(2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) + \cos(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\sin(2\sin^{-1}(\frac{1}{3}))$$

$$= \sqrt{1-\frac{4}{9}} \times (2(\sqrt{1-\frac{1}{9}})^2 + 1) + \frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{3}\times\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\times(\frac{16}{9}+1) + \frac{4}{9}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ج)

$$\cos(\sin^{-1}(-\frac{1}{2})+\sin^{-1}(\frac{-1}{4}))=\cos(-\frac{p}{6}-\sin^{-1}(\frac{1}{4}))=\cos\frac{p}{6}\cos(\sin^{-1}(\frac{1}{4}))$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{1-\frac{1}{16}}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3\sqrt{5}-1}{8}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$f(x)=x^2\sin^{-1}(x^2)$$
$$f'(x)=2x\sin^{-1}(x^2)+\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

ب)

$$f(x)=\sin^{-1}(\cos x)$$
$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-1$$

د)

$$f(x)=\sqrt{x}\cos^{-1}x^2+\sin^{-1}\sqrt{x}$$
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^{-1}x^2+\frac{-2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ج)

$$f(x)=3\sec^{-1}\frac{2}{x}+\csc^{-1}2x$$
$$f(x)=3\cos^{-1}\frac{x}{2}+\sin^{-1}\frac{1}{2x}$$
$$f'(x)=\frac{3}{2}.\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$$

هـ)

$$f(x)=x(\sec^{-1}2x)^2 \Rightarrow f(x)=x(\cos^{-1}\frac{1}{2x})^2$$
$$f'(x)=(\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2-2x(\frac{-1}{2x^2})\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}}=(\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2+\frac{2}{\sqrt{4x^2-1}}$$

و)

$$f(x)=\csc^{-1}\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})^2$$
$$f'(x)=\frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}}=-\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(5) تساوی های زیر را تحقیق کنید.

$$A=\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

که در آن $\left|\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\right|\le\frac{p}{2}$

حل)

$$\sin A=\sin(\sin^{-1}y)=\sin(\sin^{-1}x)\cos(\sin^{-1}y)+\sin(\sin^{-1}y)\cos(\sin^{-1}x)$$
$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\Rightarrow A=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

ب) $tg^{-1}x+tg^{-1}y=tg^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

حل)

$$tg(tg^{-1}x+tg^{-1}y)=\frac{tg(tg^{-1}x)+tg(tg^{-1}y)}{1-tg(tg^{-1}x).tg(tg^{-1}y)}=\frac{x+y}{1-xy}\Rightarrow tg^{-1}x=tg^{-1}y+tg^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$$

(6) مقادیر زیر را با توجه به تمرین 5 تعیین کنید.

الف $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}-\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$

حل)

$$\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}(-\frac{3}{5})=\sin^{-1}(\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{9}{25}}-\frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sin^{-1}(\frac{16}{25}-\frac{9}{25})=\sin^{-1}(\frac{7}{25})$$

ب) $A=tg^{-1}\dfrac{1}{3}+tg^{-1}\dfrac{1}{4}+tg^{-1}\dfrac{2}{9}$

حل)

$$A=tg^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{12}}+tg^{-1}\frac{2}{9}=tg^{-1}\frac{7}{11}+tg^{-1}\frac{2}{9}=tg^{-1}\frac{\frac{7}{11}+\frac{2}{9}}{1-\frac{14}{99}}=tg^{-1}\frac{85}{85}=\frac{p}{4}$$

(7) نشان دهید:

$$tg^{-1}x+tg^{-1}\frac{1-x}{x}=\begin{cases}\frac{p}{4} & x>-1\\ -\frac{3p}{4} & x<-1\end{cases}$$

حل) طبق؟؟؟

(8) عبارت $A=\cot^{-1}(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x})$ را ساده کنید.

حل)

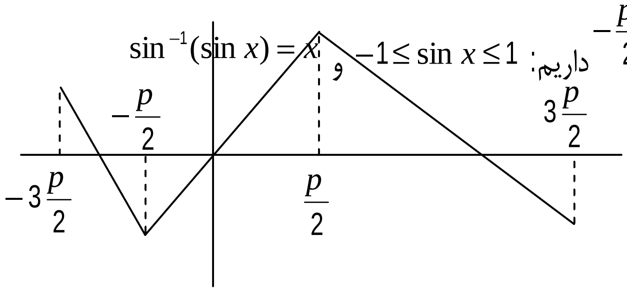
$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{p}{4})$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{p}{4})\Rightarrow A=\cot^{-1}(\frac{\sqrt{2}\cos(x-\frac{p}{4})}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{p}{4})})=\cot^{-1}(\cot(x-\frac{p}{4}))=x-\frac{p}{4}$$

(9) (تـابع $f(x)=\sin^{-1}(\sin x$ را رسـم و نشـان دهیـد دورۀ تنـاوب آن $2p$است.

حل) به ازای $-\frac{p}{2}\le x\le\frac{p}{2}$ داریم: $-1\le\sin x\le 1$ و $\sin^{-1}(\sin x)=x$

س




طبق شکل دو فاصله های به طول $2p$منحنی تکرار می شود.

(10) انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1)\int_{-\frac{3}{7}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}=\frac{1}{7}\sin^{-1}(\frac{7x}{6})\Big|_{-\frac{3}{7}}^{0}=-\frac{1}{7}\sin^{-1}(\frac{-1}{2})=\frac{1}{7}\times\frac{p}{6}$$

$$2)\int_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-25}}=\frac{1}{3}\sec^{-1}(\frac{3x}{5})\Big|_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\sec^{-1}(2)-\frac{1}{3}\sec^{-1}(\sqrt{2})=\frac{1}{3}\cos^{-1}(\frac{1}{2})-\frac{1}{3}\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{p}{9}-\frac{p}{12}=\frac{p}{36}$$

$$3)\int\frac{3dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\frac{3dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

س $$=3\sec^{-1}(x+2)+c$$

$$4)\int\frac{\sec^2 dx}{9+tg^2x}=\frac{1}{3}tg^{-1}(\frac{tgx}{3})+c$$

$$5)\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1}(x)\Big|_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})-\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=\frac{p}{6}-\frac{p}{4}$$

(11) فرض کنید $x>-1$ ثابت کنید:

$$tg^{-1}(\frac{x-1}{x+1})=tg^{-1}x-\frac{p}{4}$$

حل) طبق فرمول تمرین 6 داریم:

$$tg^{-1}x - tg^{-1}(\frac{x-1}{x+1})$$

$$= tg^{-1}\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\frac{1-x}{1+x}} = tg^{-1}\frac{\frac{1+x^2}{1+x}}{\frac{1+x^2}{1+x}} = tg^{-1}1 = \frac{p}{4}$$

(12) نشان دهید که هر گاه $|x|<1$ آنگاه:

$$\sin^{-1}x = tg^{-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})$$

حل)

$$tg(\sin^{-1}) = \frac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x = tg^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$$

(13) نشان دهید که

$$tg^{-1}x = \sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$tg(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})) = \frac{\sin(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}))}{\cos(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}))}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = x$$

$$\Rightarrow tg^{-1}x = \sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

تمرین صفحهٔ 404

1ـ انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-2}^{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=0$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است:

$$f(-x)\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x=\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

2. مشتق چهارم $f(x)=x^2\ln x$ را محاسبه کنید.

$$f'(x)=2x\ln x+x$$
$$f''(x)=2\ln x+3$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x}\qquad,\qquad f^{(4)}(x)=-\frac{2}{x^2}$$

3. مشتق پنجم $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ را محاسبه کنید.

حل)

$$f'(x)=\frac{1-x\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}$$
$$f''(x)=-\frac{2}{x^3}-(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x})$$
$$f'''(x)=\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}$$
$$f^{(4)}=\frac{-24}{x^5}-\frac{6}{x^4}-\frac{2}{x^3}-(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x})$$
$$f^{(5)}=\frac{120}{x^6}+\frac{24}{x^5}+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}$$

4. با به کار گیری قضیه مقدار میانگین در مشتق نشان دهید که اگر $0<a<b$ آنگاه

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{b}$$

حل) تابع f(x)=lnx روی بازهٔ $[a,b]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس داریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow \frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{c} \quad , \quad a<c<b$$

چون $a<c<b$ پس $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ در نتیجه:

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}<\frac{1}{a}\Rightarrow \frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

5. نشان دهید به ازای هر $x>0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$$

حل) تابع $f(t)=\ln(1+t)-t$ روی فاصلهٔ $[0,x]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست

پس:

$$0<c<x \quad , \quad f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)-x}{x}=\frac{1}{1+c}-1=\frac{-c}{1+c}$$

چون $0<c<x$ پس $-\frac{x}{1+x}<\frac{-c}{1+c}<0$

اگر $x<1$ آنگاه $-\frac{1}{2}x<\frac{-x}{1+x}$

اگر $x>1$ آنگاه $-\frac{1}{2}x<\frac{-x}{1+x}$

پس $-\frac{1}{2}x<\frac{\ln(1+x)-x}{x}<0$

لذا: $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$

6. انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

$$1)I=\int_{e^2}^{e^4}\frac{dx}{x\ln x(\ln(\ln x))}$$

$$u=\ln(\ln x)\ \Rightarrow\ du=\frac{dx}{x\ln x}$$

$$\Rightarrow\ I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{du}{u}=\ln u\Big|_{\ln 2}^{\ln 4}=\ln(\ln(\ln 4)-\ln(\ln 2)$$

$$2)\int_0^p\frac{\cos x}{2+\sin x}dx=\ln(2+\sin x)\Big|_0^{\frac{p}{2}}+\ln(2+\sin x)\Big|_{\frac{p}{2}}^{p}$$

$$=\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{3}=0$$

$$3)\int_4^9\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}\qquad u=1+\sqrt{x}\ \Rightarrow\ 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=2\int_3^5\frac{du}{u}=2\ln u\Big|_3^5=2\ln\frac{5}{3}$$

$$4)\int_{-3}^0\frac{dy}{y^2+3y-4}=\int_{-3}^0\frac{dy}{(y+4)(y-1)}=\frac{1}{5}\int_{-3}^0(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+4})du$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{y-1}{y+4}\right|\Big|_{-3}^0=\frac{1}{5}(\ln\frac{1}{4}-\ln 4)$$

$$=\frac{1}{5}\ln\frac{1}{16}$$

$$5)\int_0^1\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int_0^1\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\int_0^1(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2})dx$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

7. انتگرال های نامعین داده شده را محاسبه کنید.

$$1)\int \frac{1+\ln x}{5+x\ln x}dx \qquad u=5+x\ln x \Rightarrow du=(1+\ln x)dx$$

$$\Rightarrow\ I=\int \frac{du}{u}=\ln(5+x\ln x)+c$$

$$2)J=\int \frac{4\ln^3 x+3}{x(\ln^4 x+3\ln x)}dx$$

$$u=\ln^4 x+3\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}(4\ln^3 x+3)dx$$

$$\Rightarrow J=\int \frac{du}{u}=\ln(\ln^4 x+3\ln x)+c$$

$$3)\int \frac{2x^3}{x^2-4}dx$$

$$u=x^2-4 \Rightarrow du=2xdx\ ,\ x^2=u+4$$

$$I=\int \frac{(u+4)}{u}du=\int (1+\frac{4}{u})du=u+4\ln u+c$$

$$(x^2-4)+4\ln(x^2-4)+c$$

8. ثابت کنید به ازای هر $x>0\ ,\ x\neq 1$ داریم:

$$x-1-\ln x>0 \quad ,\quad 1-\ln x-\frac{1}{x}<0$$

حل) اگر قرار دهیم $f(x)=\ln x \quad , \quad g(x)=x-1$ آنگاه:

$$x>1 \qquad \left.\begin{array}{l} g(1)=f(1)=0 \\ g'(x)=1>\frac{1}{x}=f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)<g(x)$$

$$x<1 \qquad g'(x)=1<\frac{1}{x}=f'(x) \Rightarrow f(x)<g(x)$$

درنتیجه $\ln x<x-1$

حال اگر به جای $x$ , $\frac{1}{x}$ قرار دهیم، داریم:

$$\ln\frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow -\ln x < \frac{1}{x} - 1$$
$$\Rightarrow 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0$$

و از آنجا نتیجه بگیرید: که

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

نامساوی اول داریم $\ln x < x - 1$ و از نامساوی دوم داریم: $1 - \frac{1}{x} < \ln x$

پس : $$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

9. ثابت کنید $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (بدون استفاده از قاعده هوپیتال)

حل) طبق مسأله قبل اگر به جای x، قرار دهیم x+1، داریم:

$$\frac{x}{+1} < \ln(1+x) < x$$

پس $$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

چون داریم: $\lim \frac{1}{x+1} = \lim 1 = 1$ ، طبق قضیه فشردگی

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

10. ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (بدون استفاده از هوپیتال)

حل) طبق تمرین 8 داریم: $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$

دو طرف را بر x تقسیم می کنیم. $\frac{x-1}{x^2} < \frac{\ln x}{x} < \frac{x-1}{x}$ ، از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$$

طبق قضیه فشردگی داریم: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

# فصل هشتم

# روش‌های انتگرال‌گیری

**تمرین صفحه 436 .**

انتگرال $\int x^n Lnx\, dx$ را حل کنید.

**حل)** اگر فرض کنیم. $dv = x^n dx, u = Lnx$ داریم:

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$$

پس

$$\mathrm{I}_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} Lnx - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} Lnx - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

**تمرین صفحه 436 .**

یک فرمول بازگشتی برای $(n>1), \mathrm{I}n = \int \cos^n xdx$ پیدا کنید و به کمک آن $\int \cos^4 x\, dx$ را محاسبه کنید.

**حل)** $\mathrm{I}n$ را به صورت $\mathrm{I}n = \int \cos^{n-1} x.\cos xdx$ می نویسیم.

اگر فرض کنیم $dv = \cos x\, dx, u = \cos^{n-1} x$ داریم

$du = -(n-1)\cos^{n-2} x.\sin xdx$ و $V = \sin x$ در نتیجه:

$$\mathrm{I}n = \sin x.\cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x.\sin^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{I}_n = \sin x.\cos^{n-1} x + (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, \mathbf{I}_n$$

$$\Rightarrow \quad n\mathbf{I}_n = \sin x.\cos^{n-1} x + (n-1)\, \mathbf{I}_{n-2}$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad 2\mathbf{I}_2 = \sin x.\cos x + x$$

$$n = 4 \quad \rightarrow \quad 4\mathbf{I}_4 = \sin x.\cos^3 x + 3\mathbf{I}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_4 = \frac{1}{4}(\sin x.\cos^3 x + \frac{3}{2}(\sin x.\cos x + x))$$

**تمرین صفحه ۴۳۹ .**

**(۱) هر یک از انتگرال های زیر را محاسبه کنید.**

1) $$\int e^x (f(x) + f'(x))\, dx = f(x).e^x + c$$

2) $$\int \frac{x\, e^x}{(1+x)^2}\, dx = \frac{e^x}{x+1} + c$$

3) $$\int Ln(a^2 + x^2)\, dx = x\ Ln(a^2 + x^2) - \int \frac{x}{a^2 + x^2}\, dx$$

$$\Rightarrow x\, Ln(a^2 + x^2) - \frac{1}{2} Ln(a^2 + x^2) + c$$

4) $$\int x^3\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int u\, e^u\, du = -\frac{1}{2}(-x^2 - 1) e^{-x^2} + c$$

5) $$\int x^5\, e^x\, dx = (x^5 - 5x^4 + 2\mathbf{o}\, x^3 - 6\mathbf{o}\, x^2 + 12\mathbf{o}\, x - 12\mathbf{o})\, e^x$$

6) $$\mathrm{I} = \int \sin(Lnx)\, dx$$

$$u = \sin(Lnx) \quad , dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cos(Lnx) \quad , v = x$$

$$\mathrm{I} = x\sin(Lnx) - \int \cos(Lnx)\, dx$$

$$u = \cos(Lnx) \quad , dv = dx \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\sin(Lnx) , v = x$$

$$\mathrm{I} = x\sin(Lnx) - x\cos(Lnx) - \mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = \frac{x}{2}(\sin(Lnx) - \cos(Lnx)) + c$$

7) $$\mathrm{I} = \int x\ tg^{-1}x\ dx$$

$$u = tg^{-1}x , dv = x\ dx \Rightarrow dv = \frac{1}{1+x^2}\, dx \quad , \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\mathrm{I} = \frac{x^2}{2} tg^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} tg^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} tg^{-1}x + c$$

8) $$\int \sin^{-1}\sqrt{x}\ dx \qquad t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$$

$$\mathrm{I} = 2\int t\sin^{-1} tdt = t^2 \sin^{-1} t - \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= t^2 \sin^{-1} t + \int \frac{1 - t^2 + 1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= t^2 \sin^{-1} t + \sin^{-1} t + \int \sqrt{1-t^2}\ dt$$

$$\int \sqrt{1-t^2}\ dt = \int \cos^2 q\ d q = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cos 2q$$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = x\sin^{-1}\sqrt{x} + \sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{4}\cos 2(\cos^{-1}\sqrt{x})$$

9) $\mathrm{I}=\int (x^3+x)chx\ dx$

$\mathrm{I}=(x^3+x)shx-(3x^2+1)chx+6x\ shx-6chx$

10) $\mathrm{I}=\int Ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

$u=Ln(x+\sqrt{1+x^2}),dv=dx\Rightarrow du=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},v=x$

$\mathrm{I}=x\ Ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\ Ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+c$

11) $\mathrm{I}=\int x\ Ln(\dfrac{1+x}{1-x})dx$

$u=Ln(\dfrac{1+x}{1-x}),dv=dx\Rightarrow du=\dfrac{2}{1-x^2}dx\qquad ,v=x$

$\mathrm{I}=x\ Ln(\dfrac{1+x}{1-x})-\int\dfrac{2x}{1-x^2}dx=x\ Ln(\dfrac{1+x}{1-x})+Ln(1-x^2)+c$

12) $\mathrm{I}=\int x^2\ Ln(\dfrac{1+x}{1-x})dx$

$u=Ln(\dfrac{1-x}{1+x})\quad ,\qquad dv=x^2\,dx\qquad\Rightarrow du=-\dfrac{2}{1-x^2}dx\qquad ,v=\dfrac{x^3}{3}dx$

$\mathrm{I}=\dfrac{x^3}{3}Ln(\dfrac{1-x}{1+x})+\dfrac{1}{3}\int x^3 1-x^2\,dx$

$=\dfrac{x^3}{3}Lx(\dfrac{1-x}{1+x})-\dfrac{1}{3}\int(x+\dfrac{x}{x^2-1})dx$

$=\dfrac{x^3}{3}Lx(\dfrac{1-x}{1+x})-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{6}Ln(x^2-1)+c$

13) $\mathrm{I}=\int e^{\sqrt{x}}\ dx$

$u^2=x\Rightarrow 2udu=dx$

$\mathrm{I}=2\int u\,e^u\ du=2(u-1)e^u+c=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+c$

14) $\mathrm{I}=\int\dfrac{tg^{-1}e^x}{e^x}dx$

$u=tg^{-1}e^x\qquad ,dv=\dfrac{dx}{e^x}\Rightarrow du=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx,v=-\dfrac{1}{e^x}$

$\mathrm{I}=-\dfrac{tg^{-1}e^x}{e^x}+\int\dfrac{dx}{1+e^{2x}}=\dfrac{tg^{-1}e^x}{e^x}+\int\dfrac{du}{u(1+u^2)}$

$=-\dfrac{tg^{-1}e^x}{e^x}+Ln\ e^x+\dfrac{1}{2}\ Ln(1+e^{2x})-2tg^{-1}e^x+c$

15) $I=\int(\sin^{-1}x)^2\,dx$

$u=(\sin^{-1}x)^2 \quad , dv=dx \quad \Rightarrow du=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x\,dx \,,\, v=x$

$I=x(\sin^{-1}x)^2-\int\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x\,dx$

$=x(\sin^{-1}x)^2+2(\sqrt{1-x^2})\sin^{-1}x-2x+c$

16) $I=\int(\dfrac{Lnx}{x})^2\,dx$

$u=(\dfrac{Lnx}{x})^2 \quad , \quad dv=dx \quad \Rightarrow du=2(\dfrac{1-Lnx}{x^2})(\dfrac{Lnx}{x})\,dx, v=x$

$I=x(\dfrac{Lnx}{x})^2-2\int\dfrac{Lnx-(Lnx)^2}{x^2\,dx}$

$=x(\dfrac{Lnx}{x})^2-2\int\dfrac{Lnx}{x^2}dx+2\int(\dfrac{Lnx}{x})^2\,dx$

$-I=x(\dfrac{Lnx}{x})^2+2\int\dfrac{1-Lnx-1}{x^2\,dx}$

$I=-x(\dfrac{Lnx}{x})^2-2(\int(\dfrac{Lnx}{x})'dx-\int\dfrac{1}{x^2}dx)+c$

$=-x(\dfrac{Lnx}{x})^2-2(\dfrac{Lnx}{x})+\dfrac{1}{x}+c$

17) $I=\int\dfrac{Ln(1+x)}{2(1+x)}dx=\dfrac{1}{2}\int u\,du$

$=\dfrac{1}{4}(Ln(1+x))^2+c$

18) $I=\int_0^{\frac{p^2}{2}}\cos\sqrt{2x}\,dx$

$u=\sqrt{2x} \quad \Rightarrow \quad 2udu=2dx$

$I=\int_0^{p}u\cos u\,du=u\sin u+\cos u+c$

19) $I=\int_1^4\sec^{-1}\sqrt{x}\,dx \quad , \quad u=\sqrt{x}$

$2u\,du=dx$

$I=2\int_1^2 u\sec^{-1}u\,du=2\int_1^2 u\cos^{-1}(\dfrac{1}{u})\,du$

$t=\cos^{-1}(\dfrac{1}{u})\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{u^2}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{u^2}}}\,du=\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}du$

$$I = 2(\frac{u^2}{2}\cos^{-1}(\frac{1}{u})) - \int \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du$$

$$= u^2 \cos^{-1}(\frac{1}{u}) - \sqrt{u^2-1}\,\Big|_1^2 = 4\times\frac{p}{3} - \sqrt{3}$$

20) $$I = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} x.\cot x.\csc x\,dx = -\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} x(\csc x)'\,dx$$

$$u = x \quad , \quad dv = (\csc x)'\,dx \Rightarrow du = dx\ ,\ v = \csc x$$

$$I = x\csc x\,\Big|_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} - \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} \csc x\,dx$$

$$\int \csc x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}Ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|$$

$$I = (\frac{3p}{4}\times\sqrt{2} - \frac{p}{4}\times\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(Ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| - Ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|)$$

21) $$I = \int_0^{\frac{p^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx \qquad\qquad u^2 = x \Rightarrow 2u\,du = dx$$

$$I = 2\int_0^{\frac{p}{2}} u\sin u\,du = 2(-u\cos u + \sin u)\,\Big|_0^{\frac{p}{2}}$$

**تمرین صفحه ۴۴۴ .**

**هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید.**

1) $$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\, dx$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow (Ax+B)(x^4+2x^2+1) + (Cx+D)(x^2+1) + Ex + F$$

$$= x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad , \quad B = -1 \quad , \quad 2A + C = 4 \Rightarrow C = 2$$

$2B$

2) $$\int \frac{(\sec^2 x + 1).\sec^2 x}{1 + tg^2 x}$$

$$u = tgx \Rightarrow du = \sec^2 x dx \ , \ u^2 = \sec^2 x - 1$$

$$I = \int \frac{(u^2+2)du}{1+u^3}$$

$$\frac{u^2+2}{1+u^3} = \frac{A}{1+u} + \frac{Bu+c}{1+u+u^2}$$

$$\Rightarrow (A+B)u^2 + (A+B+C)u + A + C = u^2 + 2$$

$$A + B = 1$$

$$A + B + C = \mathbf{0} \Rightarrow C = -1 \quad , \quad A = 3 \quad , \quad B = -2$$

$$A + C = 2$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{3}{u+1} du - \int \frac{2u+1}{u^2+u+1} du = 3\ln(u+1) - \ln(u^2+u+1) + c$$

$$I = 3\ln(tgx+1) - \ln(tg^2 x + tgx + 1) + c$$

3) $$I=\int\frac{x^2+2x-1}{27x^3-1}dx$$

$$\frac{x^2+2x-1}{(3x-1)(9x^2+3x+1)}=\frac{A}{3x-1}+\frac{Bx+C}{9x^2+3x+1}$$

$$\Rightarrow (9A+3B)x^2+(3A-B+3C)x+A=x^2+2x-1$$

$$\Rightarrow 9A+3B=1 \quad , \quad 3A-+3C=2 \quad , A-C=-1$$

$$A=C-1 \quad , \quad 9C-9+3B=1$$

$$3C-3-B+3C=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}9C+3B=10\\ 6C-B=5\end{cases} \Rightarrow 27C=25 \Rightarrow C=\frac{25}{27}$$

$$A=\frac{-2}{27} \quad , \quad B=\frac{75}{9}-\frac{45}{9}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{27}\int\frac{dx}{3x-1}=-\frac{2}{81}\ln(3x-1)$$

$$\frac{\frac{10}{3}x-\frac{25}{27}}{9x^2+3x+1}=\frac{1}{27}.\frac{90x-25}{9x^2+3x+1}$$

$$I=-\frac{2}{81}\ln(3x-1)+\frac{1}{27}\int\frac{90x-25}{9x^2+3x+1}dx$$

4) $$I=\int\frac{dx}{x^3+x^2+x}=\int\frac{dx}{x(x^2+x+1)}$$

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$A=1 \quad , \quad B=-1 \, , \quad C=-1$$

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x+1}{x^2+x+1}=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}tg^{-1}\left(\frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

5) $$\int \frac{dq}{\cos q\,(1+\sin q)}$$

$$u=\sin q \Rightarrow \frac{du}{\cos q}=dq$$

$$I=\int \frac{du}{(1-u)^2(1+u)}=\int \frac{du}{(1+u)^2(1-u)}$$

$$\frac{1}{(1+u)^2(1-u)}=\frac{A}{1+u}+\frac{B}{(1+u)^2}+\frac{C}{1-u}$$

$$C=\frac{1}{4}\quad,\qquad B=\frac{1}{2}\quad,\qquad A=\frac{1}{4}$$

$$I=\frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u}+\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)^2}-\frac{1}{4}\int \frac{du}{u-1}$$

$$I=\frac{1}{4}\ln(1+\sin q)-\frac{1}{2(1+\sin q)}-\frac{1}{4}\ln(\sin q-1)+C$$

6) $$\int \frac{dq}{\sin(1+\sin q)}=\int \frac{dq}{\sin q}-\int \frac{dq}{1+\sin q}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin q-1}{\sin q+1}\right|-\int \frac{1-\sin q}{\cos^2 q}dq$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin q-1}{\sin q+1}\right|-tgq=\frac{1}{\cos q}+C$$

7) $\int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{Dt+E}{(t^2+1)^2}$$

$$A(t^2+1)^2 + (Bt+C)(t^2+1) + dt + E = 1$$

$$A = \frac{1}{4} \quad , \qquad B = -\frac{1}{4}$$

$$A + C + E = 1 \ \Rightarrow \qquad C + E = \frac{3}{4}$$

8) $\int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx$

$$\frac{x^2+1}{x^3+8} = \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2 + (2A+2B+2C)x + 4A + 2C = x^2+1$$

$$A + B = 1$$

$$\Rightarrow C = -1 \qquad , \qquad A = \frac{3}{4} \quad , \qquad B = \frac{1}{4}$$

$$A + B + C = 0$$

$$4A + 2C = 1$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int \frac{3x+1}{x^2+2x+4} dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x+2) + \frac{1}{4}\int \frac{2x+2+(x-1)}{x^2+2x+4} dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x+2) + \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{4}\int \frac{(x-1)}{x^2+2x+4}$$

$$\int \frac{(x-1)}{(x+1)^2+3} dx = \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}} tg^{-1}(\frac{x+1}{\sqrt{3}})$$

9) $\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3} = \int \frac{dx}{x^3(x-3)}$

$$\frac{dx}{x^3(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-3}$$

$$C = -\frac{1}{3} \quad , \quad D = 1 \quad , \quad A = -1 \, , \quad B = \frac{4}{3}$$

$$I = -\ln x - \frac{4}{3}.\frac{1}{x} - \frac{1}{6}.\frac{1}{x^2} + \ln(x-3) + C$$

10) $\int \frac{x^2+2}{4x^5 + 4x^3 + x} = \int \frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2}$

$$\frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2}$$

$$A = 2 \quad , \quad B = -4 \, , \quad \dots$$

11) $\int \frac{xdx}{(x^2-x+1)^2}$

$$\frac{x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} = \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)^2}$$

$$A = 1 \quad , \quad B + D = 0 \quad , \quad C = 0$$

$$3B + D = 2 \quad \Rightarrow \quad B = 1 \, , \quad D = -1$$

12) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$

13) $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}$

14) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$

تمرین صفحهٔ 449.

هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x) + C$

2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

$x = 3\sin q \qquad \Rightarrow dx = 3\cos q \, dq$

$I = \int \frac{9\sin^2 q . 3\cos q dq}{3\cos q} = \frac{9}{2}q - \frac{9}{4}\sin 2q$

3) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = 27\int \sin^3 q dq = 27\int \sin q - \cos^2 q \sin q$

$= -27\cos q + 9\cos^3 q + c$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dq}{\sin q} = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sin q + 1}{\sin q - 1}\right| + 2$

5) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

$x = 3\sin q \ \Rightarrow \ I = 81\int \sin^2 q . \cos^2 q dq$

$I = \frac{81}{4}\int \sin^2 2q \, dq = \frac{81}{8}q - \frac{81}{32}\sin 4q + C$

6) $\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int (\sin q + 1) dq = -\cos q + q$

7) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx \qquad x = 3tgq \ \Rightarrow \ dx = 3\sec^2 q dq$

$I = 27\int tg^3 q \, dq = 27\int tgq(\sec^2 q - 1)dq$

$= \frac{27}{2}tg^2 q + 27\ln(\cos q) + C$

8) $$I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\cos^2 q}{\sin^2 q}dq=-\cot q-q+C$$

9) $$I=\int_{-\ln 2}^{0}e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$$

$$u=e^x\ \Rightarrow\ I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}du=\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}}\cos^2 q\,dq$$

$$=(\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}\sin 2q)\Big|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}}=\frac{p}{4}-(\frac{p}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8})$$

10) $$\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int\frac{dx}{((x+1)^2+1)^2}=\int\frac{du}{(u^2+1)^2}$$

$$\int\frac{\sec^2 q}{\sec^4 q}dq=\int\cos^2 q dq=\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}\sin 2q+C$$

11) $$\int\frac{dx}{(1+2x^2)^{\frac{5}{2}}}\quad,\qquad \sqrt{2}x=tgq$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sec^2 q}{\sec^5 q}dq=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\cos^3 q\,dq$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int(\cos q-\sin^2 q\cos q)dq=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin q-\frac{\sin^3 q}{3\sqrt{2}}+C$$

12) $$\int \frac{dq}{2+\sin q} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} tg^{-1}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

13) $$\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dq}{1+\sin q+\cos q} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t}$$

$$= \ln(1+t)\Big|_0^1 = \ln 2$$

14) $$\int \frac{dq}{3+2\cos q} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} tg^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C$$

15) $\int \sec^3 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2}$

$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$\frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{(u-1)^2}$

$D = \frac{1}{4}$ , $B = \frac{1}{4}$ , $A + C = 0$ , $A - C = -\frac{1}{2}$

$A = -\frac{1}{4}$ , $C = \frac{1}{4}$

$I = -\frac{1}{4}\ln|\sin x + 1| - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{4}\ln|\sin x - 1| - \frac{1}{4}.\frac{1}{\sin x - 1}$

16) $\int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

17) $I = \int x\sin^{-1} x dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \sin^2 q\, dq$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{4}(\sin^{-1} x) + \frac{1}{8}\sin 2(\sin^{-1} x) + C$

18) $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1-t}$

$= -\ln\left|tg\frac{x}{2} - 1\right| + C$

19) $$\int_0^p \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}dx = -\int_1^{-1}\frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{2}tg^{-1}u\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\times\frac{p}{2} = \frac{p}{4}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^{2-1}}} = \int \frac{\sec q\,.tgq}{\sec^4 q\,.tgq}dq = \int \cos^3 q dq$$

$$= \int (1-\sin^2 q)\cos q dq = \sin q - \frac{\sin^3 q}{3} + C$$

21) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1)+C$$

22) $$\int \frac{dx}{4x^2+12x+13} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2+4} = \frac{1}{4}tg^{-1}(\frac{2x+3}{2})$$

# فصل نهم

# مختصات قطبی و منحنی‌های قطبی

## تمرین صفحه 456

1. برای هر یک از نقاط زیر، دو مجموعه دیگر از مختصات قطبی همان نقطه را پیدا کنید که در یکی $r > 0$ و دیگری $r > 0$ باشد.

الف) $(\sqrt{2}\,,-\frac{p}{4}) \;:\; (-\,,\frac{3p}{4}) \;,\; (\sqrt{2}\,,\frac{7p}{4})$

ب) $(-2\,,\frac{4p}{3}) \;:\; (2\,,\frac{7p}{3}) \;,\; (-2\,,\frac{10p}{3})$

ج) $(-3\,,-p) \;:\; (3\,,0) \;,\; (-3\,,p)$

2- مختصات قطبی نقاط زیر را با شرایط $r > 0$ و $0 \le q \le 2p$ تعین کنید

الف) $(2\,,2) : (2\sqrt{2}\,,\frac{7p}{4})$

ب) $(-1\,,-\sqrt{3}) : (2\,,\frac{4p}{3})$

ج) $(1\,,\sqrt{3}) : (2\,,\frac{p}{3})$

3- معادله قطبی معادلات زیر را بنویسید.

الف) $x^3 = 4y^2 :\quad r^3\cos^3 q = 4r^2\sin^2 q \quad\Rightarrow\quad r = \dfrac{4\sin^2 q}{\cos^3 q}$

ب) $xy = 1 :\quad r^2 \sin q \cos q = 1$

ج)
$$x^2-4x+y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=4x$$
$$\Rightarrow r^2=4r\cos q$$
$$\Rightarrow r=4\cos q$$

4- معادلات دکارتی معادلات زیر را بنویسید.

الف) $r=2\sin 3q=2(3\sin q\cos^2 q-\sin^3 q)$

$$r^4=6r\sin q(r\cos q)^2-2(r\sin q)^3$$
$$(x^2+y^2)^2=6yx^2-2y^2$$

ب) $r=\dfrac{4}{3-2\cos q}\Rightarrow 3r-2r\cos q=4$

$$3\sqrt{x^2+y^2}-2x=4\Rightarrow 3(x^2+y^2)=(2x+4)^2$$
$$3x^2+3y^2=4x^2+16x+16$$

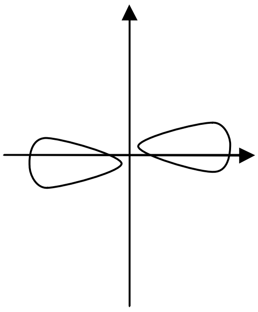
ج) $r^2=q\Rightarrow x^2+y^2=tg^{-1}(\frac{y}{x})$

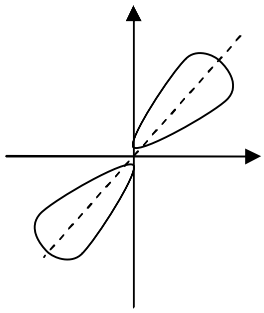
$$\Rightarrow y=xtg(x^2+y^2)$$

تمرین صفحه 462

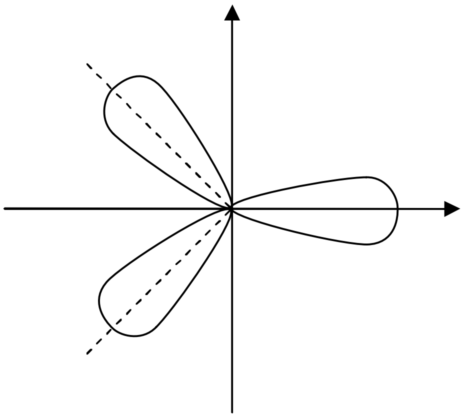
1. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

1) $r^2=9\sin 2q$ 2) $r^2=16\cos 2q$

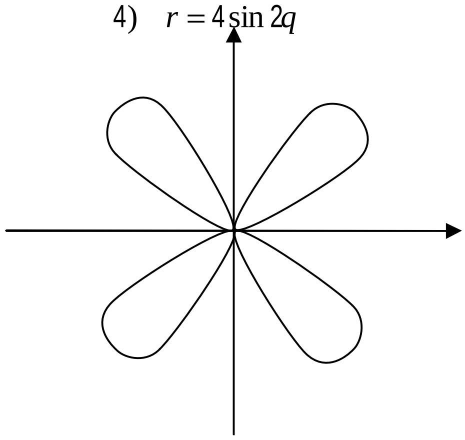




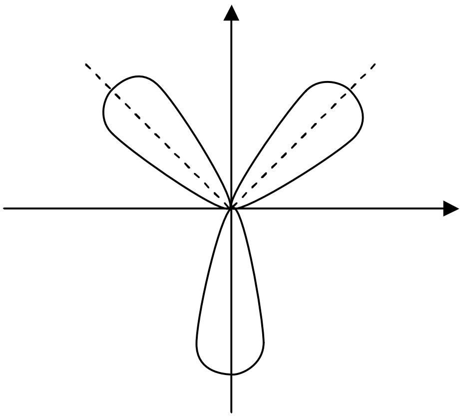
3) $r = 3\cos 3\theta$



4) $r = 4\sin 2\theta$



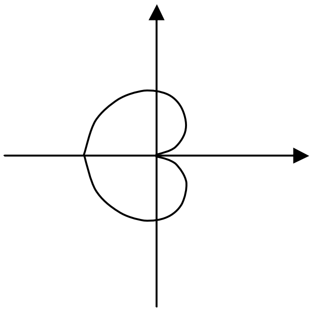
5) $r = 3\sin 3\theta$



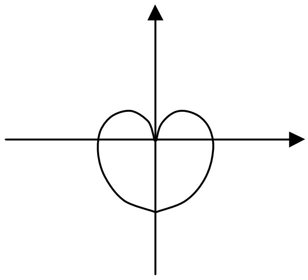
6) $r = 1 + 2\sin\theta$

$r = 2(\frac{1}{2} + \sin\theta)$

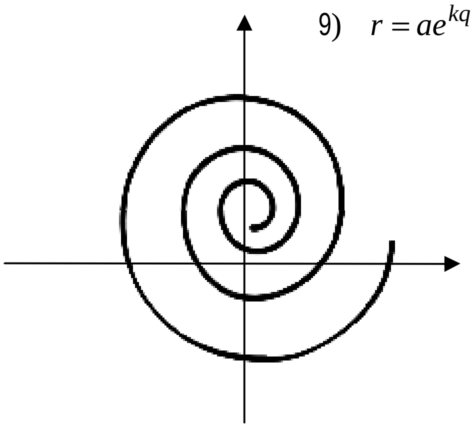
7) $r = 4(1 - \cos q)$



8) $r = 3(1 - \sin q)$



9) $r = ae^{kq}$



2. فرض کنید خطی از مبدأ بر خط $dx+by-c=0$ عمود باشد.

مختصات تقاطع آنها را در مختصات قطبی تعین کنید.

$$y=x-\frac{d}{b}x+\frac{c}{b}$$

خط مورد نظر به صورت $y=\frac{d}{b}x$ است. که در مختصات قطبی به

صورت $q=tg^{-1}(\frac{d}{b})$ مطرح می شود.

$$r\sin q=-\frac{d}{b}r\cos q+\frac{c}{b}$$

$$r=\frac{c}{b\sin q+d\cos q}=\frac{c}{b\sin(tg^{-1}(\frac{b}{d}))+d\cos(tg^{-1}(\frac{b}{d})}$$

$$r=\frac{c}{\frac{b^2}{\sqrt{b^2+d^2}}+\frac{d^2}{\sqrt{b^2+d^2}}}$$

$$r=\frac{c}{\sqrt{b^2+d^2}}$$

3. مسأله 2 را در مورد خط $\sqrt{3}\,x+y=6$ حل کنید.

$$q=tg^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{p}{6}$$

$$r=\frac{6}{\sqrt{4}}=3$$

4. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $r = 2\sin q$

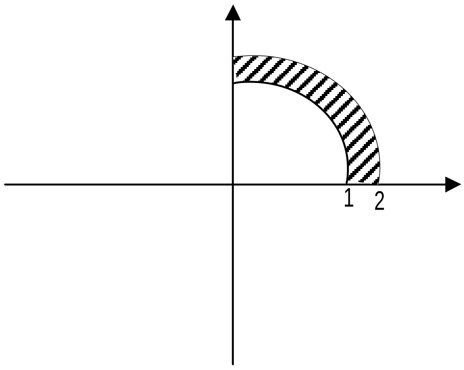
$$r = 2\sin q \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2r\sin q \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2y$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + (y\text{-}1)^2 = 1$$

ب) $r = 2\sin(q + 45°)$

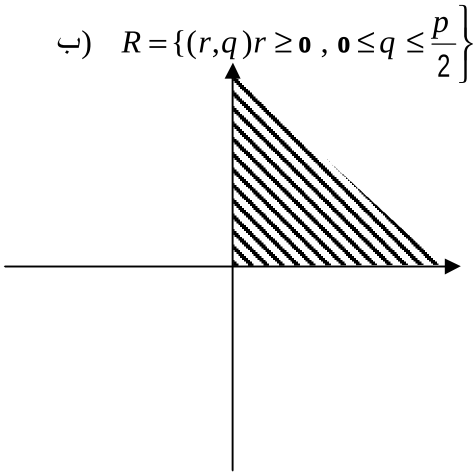
کافی است نمودار قبلی را به اندازه $45^\circ$ در جهت ساعت دوران دهیم.

5. ناحیه های زیر را در مختصات قطبی نمایش دهید.

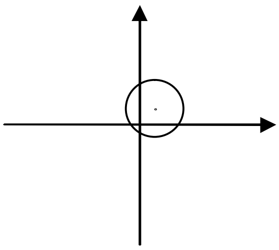
الف ) $D = \{(r,q)1 \le r \le 2 \text{ , } 0 \le q \le \frac{p}{2}\}$




ب) $R = \left\{(r,q) r \ge 0 \text{ , } 0 \le q \le \frac{p}{2}\right\}$



ج) $P=\{(r,\theta)\ 0\le r\le 2\cos\theta\ ,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

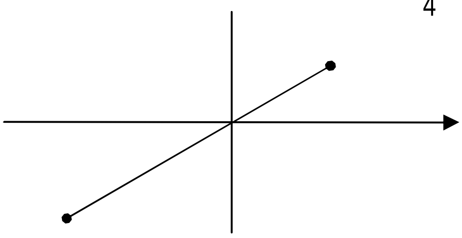


$0\le r\le 2\cos\theta \Rightarrow 0\le r^2\le 2r\cos\theta$

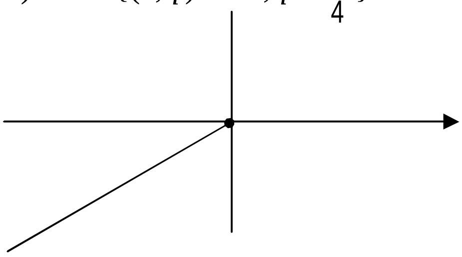
$0\le x^2+y^2\le 2x$

$(x-1)^2+y^2\le 1$

د) $T=\{(r,\theta)-3\le r\le 2\ ,\ \theta=\frac{\pi}{4}\}$



ه) $K=\{(r,\theta)r\le 0\ ,\theta=\frac{\pi}{4}\}$



تمرین صفحه 446

1. نقاط تقاطع نمودارهای داده شده را پیدا کنید.

الف) $r = 1 - \sin\theta \ , \ r = \cos(2\theta)$

حل)

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = \cos(2\times\frac{\pi}{4}) = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1 - \sin\frac{\pi}{2} = 0$$

دو منحنی از قطب می گذرند.

$$\cos(2\theta) = 1 - \sin\theta \Rightarrow 1 - 2\sin^2\theta = 1 - \sin\theta \Rightarrow 2\sin^2\theta = \sin\theta$$
$$\Rightarrow \theta = 0 \ , \pi \ \ , \theta = \frac{\pi}{6} \text{ و } \frac{5\pi}{6}$$

ب) $r = 2\cos q \;,\; r = 2\sin q$

$$q = 0 \rightarrow r = 2\sin 0 = 0$$

قطب روی دو منحنی است　"

$$q = \frac{p}{4} \rightarrow r = 2\cos\frac{p}{2} = 0$$

$$\cos 2q = \sin q = \cos(q - \frac{p}{2}) \Rightarrow 2q = 2Kp \pm (q - \frac{p}{2})$$

$$\Rightarrow q = 2Kp - \frac{p}{2} \Rightarrow q = -\frac{p}{2} \;,\; \frac{3p}{2}$$

$$q = \frac{2kp}{3} + \frac{p}{2} \Rightarrow q\ \frac{p}{2} \;,\; \frac{2p}{3} + \frac{p}{2}$$

ج) $r = 1 \;,\; r^2 = 2\cos q$

$r = 1$ از قطب نمی گذرد.

$$1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{p}{3}$$

$$-1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{2p}{3} \;,\; \frac{4p}{3}$$

د) $r(1 - \sin q) = 3 \;,\; r = 4(1 + \sin q)$

$$q = -\frac{p}{2} \Rightarrow r = 4(1 + \sin(-\frac{p}{2})) = 0$$

منحنی دوم از قطب نمی گذرد.

$$\frac{3}{1-\sin q}=4(1+\sin q)\Rightarrow \cos^2 q=\frac{3}{4}\Rightarrow \cos q=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$
$$q=\pm\frac{p}{6}\ ,\ \frac{5p}{6}\ ,\ \frac{7p}{6}$$

2. نمودار $r=\sin\frac{3}{2}q$ ، خودش را قطع می کند. نقاط تقاطع را تعین کنید.

تمرین صفحه 469

1. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r=1+\sin q$ را در نقطه ($\frac{p}{3}$ و $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$) بدست آورید.

حل)

$$\frac{dr}{dq}=\cos q\ ,\ tg\frac{p}{3}=\sqrt{3}$$
$$m=tgd=\frac{\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{3}}$$
$$m=\frac{\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}-\frac{3}{2}}$$

2. زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی های زیر را در نقاط مفروض بدست آورید.

الف) $p(\sqrt{2}و\frac{p}{6})\ ,\ r^2 = 4\cos 2q$

حل) $tgb = \frac{r}{\frac{dr}{jq}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-\sin 2q}{\sqrt{4\cos 2q}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

ب) $p(3,p)\ ,\ r = 3(1-\sin q)$

$$tgb = \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{3}{-\cos q} = 1 \quad \Rightarrow b = \frac{p}{4}$$

3. مطلوب است اندازه زاویه کوچکترین خطهای مماس بر نقطه تقاطع داده شده در منحنی

$$p(-2\ ,\ \frac{2p}{3})\ ,\ r = 4\cos^2 q - 3\ ,\ r = 4\cos q$$

$$m_1 = tgd_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}.(-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2}{-4\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{2-2}{-4\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = 0$$

$$m_2 = tgd_2 = \frac{-8\sin\frac{2p}{3}\cos\frac{2p}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})-2}{-8\sin\frac{2p}{3}\cos\frac{2p}{3}+2(\frac{-\sqrt{3}}{3})}$$

$$= \frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})-2}{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}} =$$

4. دلنمای $r = 2(1-\cos q)$ مفروض است. ثابت کنید $tgb = tg\frac{q}{2}$

حل)

$$\frac{dr}{dq} = 2\sin q \Rightarrow tgb = \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{1-\cos q}{\sin q}$$

$$\Rightarrow tgb = \frac{2\sin^2\frac{q}{2}}{2\cos\frac{q}{2}\sin\frac{q}{2}} = \frac{\sin\frac{q}{2}}{\cos\frac{q}{2}} = tg\frac{q}{2}$$

5. ثابت کنید. بـه ازای هـر $a , b$، خطـوط ممـاس در هـر یـک از نقـاط تقـاطع دلنمای زیر متعامدند.

$r = a(1+\sin q)$ , $r = b(1-\sin q)$

# فصل دهم

# کاربردهای انتگرال

5-1-10 تمرین صفحه 476

1. سطح محصور به نمودار توابع $x=y^2$ , $x=2y^2-y-2$ را محاسبه کنید.

حل)

$$y^2=2y^2-y-2 \Rightarrow y^2-y-2=0 \Rightarrow y=-1 , y=2$$

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(y^2-y-2)dy\right|=\left|\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{8}{3}-2-4\right)-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right|=\left|\frac{-10}{3}-\frac{7}{6}\right|$$

$$=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

2. سطح محصور به نمودار توابع $x-y=7$ , $2y^2-y+3-x=0$ را محاسبه کنید

حل)

$$x = v + y \ , \ x = 2y^2 - y + 3$$
$$v + y = 2y^2 - y + 3 \Rightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 y = -1 \ , \ y = 2$$
$$s = \left| \int_{-1}^{2} (2y^2 - 2y - 4) dy \right| = \left| \left( \frac{2}{3} y^3 - y^2 - 4y \right) \right|$$
$$= \left| \left( \frac{16}{3} - 12 \right) - \left( \frac{-2}{3} - 1 - 4 \right) \right| = \left| 6 - 12 + 5 \right| = 1$$

3. سطح محصور به نمودار توابع $y = \cos x$ , $y = \sin x$ را در فاصله $0 \le x \le 2p$ محاسبه کنید.

$$s = \left| \int_0^{\frac{p}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right|$$
$$+ \left| \int_{\frac{3p}{4}}^{2p} (\sin x - \cos x) dx \right|$$
$$s = 3$$

4. سطح محصور به نمودار توابع $y = x^2 - 2x$ , $y = 4 - x^2$ را محاسبه کنید.

حل)

$$x^2-2x=4-x^2 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$$
$$\Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ x=2$$
$$s=\left|\int_{-1}^{1}(4-2x^2+2x)dx\right|=(4x-\frac{2}{3}x^3+x^2)$$
$$=8-\frac{16}{3}+4+4-\frac{2}{3}-1=15-\frac{16}{3}=\frac{29}{3}$$

5. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به خطوط $x=0$ , $x=2$ و

منحنی های $y=2x-x^2$ , $y=2x$

$$s=\left|\int_{0}^{2}(2x-x^2-2x)dx\right|=\left|-\frac{x^3}{3}\right|=\frac{8}{3}$$

6. سطح محصور به نمودار توابع $x=1-3y^2$ , $x=2y^2$ را محاسبه کنید.

حل)

$$2y^2 = 1-3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$s = \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1-3y^2-2y^2)dy = 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1-3y^2-2y^2)dy$$

$$= 2(y - y^3 - \frac{2}{3}y^3)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{15\sqrt{5}})$$

7. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی $x^2 = 4y$ , $y = \frac{8}{x^2+4}$

حل)

$$\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+8)(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$s = \int_{-2}^{2} (-\frac{x^2}{4} + \frac{8}{x^2+4})dx = 2\int_{0}^{2} \frac{8}{x^2+4}dx - 2\int_{0}^{2} \frac{x^2}{4}dx$$

$$= 8tg^{-1}(\frac{x}{2})\Bigg|_{0}^{2} - \frac{x^3}{6}\Bigg|_{0}^{2} = 2p - \frac{4}{3}$$

8. مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایره $x^2+y^2=3$ و محدود به سهمی های $x^2 = 2y$ , $y^2 = 2x$ می باشد، حساب کنید.

حل) این مساحت با انتگرال دوگانه در ریاضی 2 حل می شود.

9. مساحت ناحیه ای را حساب کنید که به خطوط $y=x+1\ ,\ y=\cos x$ و محور $x$ ها محدود است.

حل) صورت سؤال اشتباه است.

10. مطلوب است محاسبه مساحت بین منحنی $x=2\ ,\ y^2=x^3-x^2$

حل)

$$x=2 \Rightarrow y^2=8-4=4 \Rightarrow y=\pm 2$$
$$s=2\int_0^2 \sqrt{x^3-x^2}\,dx=2\int_0^2 x\sqrt{1-x}$$
$$1-x=u^2 \Rightarrow dx=-2udu$$
$$s=-4\int u^2(1-u^2)du=-4\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1$$
$$=8\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}$$

11. مساحت بین منحنی های $y=(x-4)^2\ ,\ y=16-x^2$ و محور $x$ ها را تعین کنید.

حل)

$$16-x^2=(x-4)^2$$
$$16-x^2=x^2-8x+16\Rightarrow 2x^2-8x=0\Rightarrow x=0\ ,\ 4$$
$$s=\int_0^4(16-x^2-(x-4)^2)dx=16x-\frac{x^3}{3}-\frac{(x-4)^3}{3}\Big|_0^4$$
$$=(64-\frac{64}{3})+\frac{64}{3}=64$$

12. مطلوب است مساحت محدود به منحنی $y=x^4-2x^2+3$ و محور $x$ها که بین عرض های نقاط می نیمم $y(x)$ واقع است.

حل)

$$y'=4x^3-6x^2+2x=x(x-1)(4x-2)$$
$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=\frac{1}{2}$$
$$y=3\ ,\ y=3\ ,\ y=\frac{49}{16}$$

13. مساحت محدود به نمودار تابع $(y-1)^2=x-1\ ,\ x=2(y-1)^2$ را محاسبه کنید.

حل)

$x = 2(x-1) \Rightarrow X = 2$

$(y-1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0\ ,\ y = 2$

$s = \int_0^2 (1 + (y-1)^2 - 2(y-1)^2)dy = \int_0^2 (1-(y-1)^2 dy$

$= (y - \frac{(y-1)^3}{3}) \Big|_0^2 = (2 - \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

14. سطح محصور به نمودار $y = chx$ و خط $x = 1$ و محور $x$ ها را حساب کنید

حل) مساحتی وجود ندارد.

15. مساحت های دو ناحیه ای را که سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ درون دایره $x^2 + y^2 = 8$ تقسیم می کند محاسبه کنید.

حل)

$y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

مساحت نیم دایره بالایی برابر نصف $8p = p(2\sqrt{2})^2$ است یعنی $4p$ است.

16. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصله $2a$ از هم قرار دارند

$(0 < a < 1)$ مساحت ناحیه ای را بیابیدکه محدود به دو قرص است.

حل) دایره های $(x+1)^2 + y^2 = 1$ , $(x-1)^2 + y^2 = 1$ را در نظر می گیریم خط $x = 1-a$ وتر مشترک دودایره است. به علت تقارن مساحت بین $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و خط را محاسبه و دو برابر می کنیم

$$x = 1-a \Rightarrow (1-a-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-a^2}$$

$$s = 2\int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}} (1-a-(1-\sqrt{1-y^2})dy$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{1-a^2}} (\sqrt{1-y^2} - a)dy = 4(\int_0^{\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}} \cos^2 q\, dq - \int_0^{\sqrt{1-a^2}} adv)$$

$$= 4(\frac{1}{2}\sin^{-1}(\sqrt{1-a^2}) + \frac{1}{4}\sin 2(\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}) - a\sqrt{1-a^2})$$

18) اگر $f(x) = ax$ , $g(x) = x^3$ $(a > 0$ ثابت) انگاه مساحت محصور به دو منحنی را حساب کنید.

حل)

$$a\,x = x^3 \Rightarrow x = 0 \,,\; x = \sqrt{a} \;,\; x = -\sqrt{a}$$

$$s = \left|\int_{-\sqrt{a}}^{0}(a\,x - x^3)dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{a}}(x^3 - a\,x)\right|$$

$$= 2\left|\int_{0}^{\sqrt{a}}(x^3 - a\,x)dx\right| = 2\left|(\frac{x^4}{4} - a\,\frac{x^2}{2})\Big|_{0}^{\sqrt{a}}\right|$$

$$= 2\left|(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right| = \frac{a^2}{2}$$

19) مساحت محصور به نمودار $x^2 y + 4y - 12 = 0$ و محور مختصات و خط $x = 2$ را محاسبه کنید.

$$y(x^2 + 4) = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{4 + x^2}$$

$$s = \int_{0}^{2}\frac{12}{4 + x}dx = 6tg^{-1}(\frac{x}{2})\Big|_{0}^{2} = 6\frac{p}{4} = \frac{3p}{2}$$

20. مساحت محصور به نمودار توابع $x + y = 2$ , $y = x^3$ , $x = y^3$ را محاسبه کنید.

$$s_1 = \int_{0}^{1}(2 - y - \sqrt[3]{y})dy$$

$$s_2 = \int_{0}^{1}(2 - y - \sqrt[3]{y})dx$$

$$s_1 = s_2 = (2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}})\Big|_{0}^{1} = 2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرین صفحه 480

مساحت سطح محصور را بیابید.

.1

$$-1 \le t \le 1 \quad , \quad c:\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

$$g(t) = t^3 - t \Rightarrow g(-1) = -2, g(1) = 0$$

$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

$$s = \int_{-2}^{0} (t^3 - t)(2t)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 \Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{192 - 180}{15} = \frac{112}{15}$$

$$0 \le t \le 2 \quad , \quad c:\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

شکل کاملاً متقارن است. " $x^4 + y^2 = x^2$

$$s=4\int_0^{\frac{p}{4}}\cos t(\cos^3 t-2\sin^2 t\cos t)dt$$

$$=4\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^4 tdt-8\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt$$

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^4 tdt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{p}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt$$

$$=\frac{1}{4}(t+\sin 2t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{p}{2}+\frac{p}{4})=\frac{3p}{16}$$

3) مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را محاسبه کنید.

حل) بیضی را به صورت زیر پارامتری می کنیم:
$$\begin{matrix} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{matrix} \quad 0\le t\le 2p$$

$$s=4\left|\int_0^{\frac{p}{2}}-b\sin t(a\sin t)dt\right|=\left|-2ab\int_0^{\frac{p}{2}}(1-\cos 2t)dt\right|$$

$$=2ab\times\frac{p}{2}=pab$$

4) مساحت محدود به $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را محاسبه کنید.

5. مساحت محدود به یک قوس سیکلوئید زیر را بدست آورید.

$$c:\begin{matrix} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{matrix}$$

$$s=\int_0^{\frac{p}{2}} a(1-\cos t)^2\,dt = a\int_0^{\frac{p}{2}} (1-2\cos t+\cos^2)\,dt$$
$$=(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3p}{4}-2$$

تمرین صفحه 483

1. مساحت ناحیه ای از صفحه را که بین اولین و دومین دور از پیچ ارشمیدس $r=aq$ واقع است. $(a>0)$ پیدا کنید.

$$s=\frac{1}{2}\int_0^{4p}(aq^2)\,dq=\frac{1}{2}\frac{a}{3}q^3\Big|_0^{4p}=\frac{16}{2}\frac{4}{3}ap^3$$

2. مطلوب است سطح محدود به $r=\sin 2q$

حل) به علت تقارن کامل داریم:

$$s=\frac{1}{2}\times 4\int_0^{\frac{p}{2}}(\sin 2q)^2\,dq=\int_0^{\frac{p}{2}}(1-\cos 4q)\,dq=\frac{p}{2}$$

3. مساحت داخل دایره $r=3\cos q$ و خارج دلنمای $r=1+\cos q$ را بیابید

حل)

$$3\cos q = 1+\cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{p}{3}$$

$$s = \frac{1}{2}\int_{-\frac{p}{3}}^{\frac{p}{3}} ((3\cos q)^2 - (1+\cos)^2)dq$$

$$= \int_0^{\frac{p}{3}} (2\cos^2 q - 2\cos q - 1)dq = (q + \frac{1}{2}\sin 2q - 2\sin q - q)\Big|_0^{\frac{p}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} \Rightarrow s = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

4. مساحت محصور به $r = e^{2q}$ و خطوط $q = 0$ , $q = 2p$ .

$$s = \frac{1}{2}\int_0^{2p} e^{4q}\, dq = \frac{1}{8}e^{2p}\Big|_0^{2p} = \frac{1}{8}(e^{4p} - 1)$$

5. مطلوب است مساحت داخل دایره $r = 1$ و خارج دلنمای $r = 1 - \cos q$ .

حل) دو نمودار همدیگر را در $q = \frac{p}{2}$ , $q = \frac{3p}{2}$ قطع می کنند.

به علت تقارن، مساحت در فاصله $0 \le q \le \frac{p}{2}$ را حساب کرده، دو برابر می کنیم.

$$s = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{2}} (1-(1-\cos q))^2 dq$$

$$= \int_0^{\frac{p}{2}} (2\cos q - \cos^2 q)dq = (2\sin q - \frac{1}{2}q - \frac{1}{4}\sin 2q)\int_0^{\frac{p}{2}} = 2 - \frac{p}{4}$$

6. مطلوب است مساحت ناحیه مشترک به دو منحنی $r = \cos 2q$ , $r = \sin 2q$ .

حل) به علت تقارن، مساحت را در ربع اول حساب کرده، چهار برابر می کنیم.

7. مساحت ناحیه بین $r = 6\cos q$ , $r = 6\sin q$ را حساب کنید.

$$S = \left| 2\int_0^{\frac{p}{4}} (6\sin q)^2 \right|$$

$$= \left| 6\int_0^{\frac{p}{4}} (1-\cos 2q)dq \right|$$

$$= \left| 6(q - 2\sin 2q)\int_0^{\frac{p}{4}} \right|$$

$$= 6\left(\frac{p}{4} - 2\right)$$

8. مساحت ناحیه داخل $r^2 = a^2\cos 2q$ را بدست آورید.

حل)

$$S = 4\int_0^{\frac{p}{4}} a^2\cos 2q = 4a^2\sin 2q\Big|_0^{\frac{p}{4}} = 4a^2$$

9. مساحت ناحیه $r = 1+\sin q$ را محاسبه کنید.

حل طبق مثال 10-3-3 برابر $\frac{3}{2}p$ است.

10. مساحت محدود به درون $r^2 = \sin 2q$ و دایره $r = \sqrt{2}\sin q$ را محاسبه کنید.

$$s=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{p}{2}}2\sin^{2}q-\sin 2q)dq$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}\sin 2q+\frac{1}{2}\cos 2q)\Big|_{0}^{\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{p}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(\frac{p}{4}-1)$$

تمرین صفحه 489 .

1. طول منحنی $r=a\sin^{3}\frac{q}{3}$ را در فاصله $0\le q\le p$ محاسبه کنید.

حل)

$$s=\int_{0}^{p}\sqrt{(dr)^{2}+r^{2}(dq)}=\int_{0}^{p}\sqrt{a^{2}\sin^{4}\frac{q}{3}\cos^{2}\frac{q}{3}+a^{2}\sin^{6}\frac{q}{2}}$$

$$=\int_{0}^{p}a\sin^{2}\frac{q}{3}dq=\frac{a}{2}\int_{0}^{p}(1-\cos^{2}\frac{q}{3})dq$$

$$=\frac{a}{2}(q-\frac{3}{2}\sin\frac{2q}{3})\Big|_{0}^{p}=\frac{a}{2}(p-\frac{3\sqrt{3}}{4})$$

2. مطلوب است طول قوس $r=2a\cos^{2}q$ را در فاصله $0\le q\le\frac{p}{4}$ بیابید.

حل)

$$\frac{d}{dq} = -2a\sin 2q$$

$$s = \int_0^{\frac{p}{4}} \sqrt{4a^2 \sin^2 2q + 4a^2 \cos^4 q}\, dq = 2a\int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{4\sin^2 q + \cos^2 q}\, dq$$

$$= 2a\int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{3\sin^2 q + 1}\, dq = 2a\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+3u^2}\, du$$

$$\sqrt{3}u = tgt = \int \sqrt{1+3u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sec^3 q\, dq$$

3. طول دلوار $r = a(1-\cos q)$ را بیابید.

حل)

$$\frac{dr}{dq} = a\sin q \Rightarrow \left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + r^2 = a^2\sin^2 q + a^2\cos^2 q + a^2$$

$$s = 2\int_0^{p} \sqrt{2a^2}\, dq = 2\sqrt{2}ap$$

4. طول منحنی های زیر را در بازه داده شده محاسبه کنید.

الف) $0 \le t \le 2p \;,\; y = \sin 2t \;,\; x = \cos 2t$

حل)

$$s = 4\int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t}\, dt = 2p$$

ب) $0 \le q \le 2p \;,\; y = a\sin^3 q \;,\; x = a\cos^3 q$

حل)

$$\frac{dx}{d\theta}=-3a\cos^2\theta\,\sin\theta\ ,\ \frac{dy}{dt}=3a\sin^2\theta\,\cos\theta$$

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta\ =12a\ \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$

5. طول قسمتی از منحنی $y^2=x^3$ را که بین نقاط $(0\ ,\ 0)$ و $(4\ ,\ 8)$ واقع است، محاسبه کنید.

$$y^2=x^3\Rightarrow 2yy'=3x^2\Rightarrow y'=\frac{3x^2}{2y}\Rightarrow (y')^2=\frac{9x^4}{4y^2}$$

$$\Rightarrow 1+(y')^2=1+\frac{9}{4}x$$

$$s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}(1+\frac{9}{4}x)\left.\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right|_0^4$$

$$=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

6. طول منحنی $y=\ln|\cos x|$ را در فاصله $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ محاسبه کنید.

حل)

$$y'=-tgx\Rightarrow s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx$$

$$\Rightarrow s=\ln\ \left|\sec x+tgx\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\ \left|\sqrt{2}+1\right|$$

7. طول قوس منحنی $y=\frac{1}{2}x^2$ از نقطه $A(0\ ,\ 0)$ تا نقطه $B(1\ ,\ \frac{1}{2})$ را محاسبه

کنید.

حل)

$$y' = x \Rightarrow s = \int_0^{-1} \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec^3 q\, dq$$

$$\int \sec^3 q\, dq = \int \sec^2 q . \sec q\, dq = tgq . \sec q - \int tg^2 q . \sec q\, dq$$

$$= tgq\ . \sec q - \int \sec^3 q\, dq + \int \sec q\, dq$$

$$\int \sec^3 q\ dq = \frac{1}{2} tgq\ . \sec q + \frac{1}{2} \ln \left| \sec q + tgq \right|$$

$$s = \left(\frac{1}{2} tgq \sec q + \frac{1}{2} \ln \left|\sec q + tgq\right|\right)\Big|_0^{\frac{p}{4}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{2}\right)$$

8. طول قوس منحنی $y^3 = 8x^2$ از نقطه $(1 , 2)$ تا نقطه $(27 , 18)$ را به دست آورید.

حل)

$$3y^2y' = 16x \Rightarrow y' = \frac{16x}{3y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{16x} \Rightarrow (\frac{dx}{dy})^2 = \frac{9y^4}{(16)^2x^2} = \frac{9\times 8y}{(16)^2}$$

$$1 + (\frac{dx}{dy})^2 = 1 + \frac{9}{32}y$$

$$s = \int_2^{18}\sqrt{1+\frac{9}{32}y}dy = \frac{2}{3}\times\frac{32}{9}(1+\frac{9}{32}y\Big|_2^{18}$$

$$= \frac{64}{27}((1+\frac{9}{32}\times 18 - (1+\frac{9}{16})\sqrt{1+\frac{9}{16}})$$

9. طول قوس منحنی $6xy = y^4 + 3$ را در فاصله $1 \le y \le 2$ به دست آورید.

$$x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^2}$$

$$1 + (\frac{dx}{dy})^2 = (\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2})^2$$

$$s = \int_1^2 (\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2})dy = (\frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y})\Big|_1^2 = (\frac{8}{6} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{2}) = \frac{7}{6} + \frac{1}{4}$$

10. طول قوس قسمتی از منحنی $9y^2 = 4(1+x^2)^3$ که در ربع اول از $x = 0$ تا $x = 2\sqrt{2}$ واقع است تعین کنید.

$$18yy' = 24x(1+x^2)^2 \Rightarrow y' = \frac{4x(1+x^2)^2}{3y}$$

$$(y')^2 = \frac{16x^2(1+x^2)^4}{9y^2} = 4x^2(1+x^2)$$

$$s = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2(1+x^2)}\,dx$$

11. طول قوس منحنی مقابل را بیابید:

$$C: \begin{matrix} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{matrix}, \quad 0 \le t \le 4$$

حل)

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \Big|_0^4 = \sqrt{2}(e^4 - 1)$$

12. طول قوس منحنی c را به دست آورید:

$$C: \begin{matrix} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = tg^{-1}t \end{matrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

حل)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{1+t^2}\ ,\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$$

$$S=\int_0^1\sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)}+\frac{1}{(1+t^2)^2}}dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^1$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\ln 2=\ln(\frac{1+\sqrt{2}}{2})$$

13. طول قوس $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0\le x\le 3$ محاسبه کنید.

حل)

$$y'=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow 1+(y')^2=1+x^2(x^2+2)$$

$$s=\int_0^3\sqrt{1+x^2(x^2+2)}=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx=\int_0^3(x^2+1)\,dx=\frac{x^3}{3}+x\Big|_0^3=12$$

14. طول قوس $y=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$ را در فاصله $2\le x\le 3$ تعین کنید.

حل)

$$y=\ln(e^x-1)\ln(e^x+1)$$

$$y'=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$1+(y')^2=1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$s=\int_2^3\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx=\int_2^3\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\ln(e^x-e^{-x})\Big|_2^3$$

$$=\ln\frac{e^3-e^{-3}}{e^2-e^{-2}}$$

15. طول قوس منحنی $x=\frac{1}{3}(2t+3)^{\frac{3}{2}}$ , $y=\frac{1}{3}t^{2}+t$ را در فاصله $0\le t\le 3$ محاسبه کنید.

حل)

$$\frac{dx}{dt}=(2t+3)^{\frac{1}{2}},\frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}t$$
$$s=\int_{0}^{3}\sqrt{2t+3+\frac{4}{9}t^{2}}=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}\sqrt{(2t+9)^{2}-78}\,dt$$

16. طول منحنی $y=x^{4}+\frac{1}{32x^{2}}$ را در فاصله $1\le x\le 10$ حساب کنید.

$$y'=4x^{3}-\frac{1}{16x^{3}}=\frac{64x^{6}-1}{16x^{3}}$$
$$1+(y')^{2}=(4x^{3}+\frac{1}{16x^{3}})^{2}$$
$$s=\int_{1}^{10}(4x^{3}+\frac{1}{16x^{3}})dx=x^{4}-\frac{1}{32x^{2}}\Big|_{1}^{10}$$
$$=(10^{4}-\frac{1}{3200})-(1-\frac{1}{32})$$

تمرین صفحه 495 .

1. حجم حادث از دوران ناحیه OBC حول خط BC را پیدا کنید.

حل)

$$V = p\int_0^4 (y-8)^2 dx = p\int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} - 8)^2 dx$$

$$= p\int_0^4 (x^3 - 16x^{\frac{3}{2}} + 64)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{32}{5}x^{\frac{5}{2}} + 64x)\Big|_0^4$$

2. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی $y^2 = 4x$ و خط $y = x$

حول خط $x = 4$ را بیابید.

3. حجم مخروط مستدیری به شعاع قاعده a و ارتفاع h را تعین کنید.

حل)

$$y = \frac{a}{h}x$$

$$V = p\int_0^h \frac{a^2}{h^2}x^2 dx = \frac{1}{3}pa^2 h$$

5. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه بین سـهمی $y^2 = x$ و محـور

$y$ها و خط $y = 1$ ، حول خط $y = 2$ .

حل)

$$V = \int_0^1 ((2-\sqrt{x})^2 - (2-1)^2)dx$$

$$= p\int_0^1 (3 - 4\sqrt{x} + x)dx = p\,(3x - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = p\,(3 - \frac{8}{3} + \frac{1}{2})$$

حجم حادث از دوران ناحیه محدود به $x=2y-y^2$ حول محور $y$ ها را تعین کنید.

$$V=p\int_0^2(2y-y^2)^2\,dy=p\int_0^2(4y^2-4y^3+y^4)dy$$
$$=p(\frac{4}{3}y^3-y^4+\frac{y^5}{5})\Big|_0^2=p(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5})$$

7. ناحیه A محصور به منحنی $y=x^2$ و $y=1$ , $y=4$ , $x=0$ حول محور $x$ ها دورانه می کند. حجم جسم حادث چقدر است؟

$$V=2p\int_{-2}^{2}(4^2-x^4)dx-p\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx$$
$$V=2p\int_0^2(16-x^4)dx-2p\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx$$
$$=2p(16x-\frac{x^5}{5})\Big|_0^2-2p(x-\frac{x^5}{5})\Big|_0^2$$
$$\Rightarrow V=2p(32-\frac{32}{5})-2p(1-\frac{1}{5})$$

8. منحنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را حول محور $x$ ها دوران می دهیم، حجم حاصل چقدر است.

حل)

$$y^2 = b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$$

$$V = p\int_{-a}^{a} b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx = 2pb^2\int_{0}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx$$

$$= 2p\,b^2(a-\frac{a}{3}) = \frac{4}{3}p\,b^2 a$$

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی های $y^2 = 8x \,,\, y = x^2$

حول محور $x$ ها را حساب کنید.

$$x^4 = 8x \Rightarrow x = 0 \,,\, x = 2$$

$$V = p\int_0^2 (8x - x^4)dx = p\,(4x^2 - \frac{x^5}{5})\Big|_0^2$$

$$= p\,(8 - \frac{32}{5})$$

10. ناحیه واقع بین محورهای مختصات و سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ را حول

محور $x$ ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

حل)

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = (a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax$$

$$V = p\int_0^a ((a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax)dx$$

$$\Rightarrow V = (\frac{(a+x)^3}{3} - \frac{8}{3}ax\sqrt{ax} - \frac{4}{a^2}\times\frac{2}{5}(ax)^{\frac{5}{2}} + 2ax^2\Big|_0^a$$

$$= p\,(\frac{8a^3}{3} - \frac{8}{3}a^3 - \frac{8}{5}a^3 + 2a^3) = \frac{8}{15}a^3 p$$

11. ناحیه بین یک قوس از منحنی $y = \sin x$ و محور عرض ها و خط $y = 1$ را حول محور $y$ ها دوران می دهیم حجم حاصل را محاسبه کنید.

$$V = 2p\int_0^{\frac{p}{2}} x(1-\sin x)dx = 2p\,(\frac{x^2}{2} + x\cos x - \sin x - \sin x)\Big|_0^{\frac{p}{2}} = 2p\,(\frac{p^2}{8} - 1)$$

12. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ و خط $5x - 8y + 14 = 0$ حول محور $x$ ها را به دست آورید.

حل)

$$8y = 2x^2 + 4 \Rightarrow 5x + 14 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 10 = 0$$

$$x = \frac{5+\sqrt{105}}{4} \;,\; x = \frac{5-\sqrt{105}}{2}$$

$$V = p\int_{\frac{5-\sqrt{105}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{105}}{2}} (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2 - (\frac{5x+14}{8})^2\, dx$$

تمرین صفحه 498 .

1. در یک جسم کروی شکل به شعاع 5 سانتی متر، حفره ای به شعاع 2 سانتی متر ایجاد می کنیم محور حفره یک قطر کرده است. حجم قسمت باقیمانده جسم را بدست آورید.

$$V = \frac{4}{3}p(125) - \frac{4}{3}p \;= \frac{4}{3}p(125-8)$$
$$= \frac{4}{3}p(117)$$

2. مطلوب است حجم جسم حادث از دوران ناحیه OBC محصور به $y^2 = x^3$ محور $x$ ها و خطوط $y=0$ , $y=8$ ، حول محور $x$ ها .

$$V = p\int_0^4 (64 - x^3)dx = p(64x - \frac{x^4}{4})\Big|_0^4$$
$$V = p(256 - 64) = 192p$$

3. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه OAC محصور به منحنی $y^2 = x^3$ و خط $x = 4$ و محور $x$ ها حول خط ac .

$$V = p\int_0^4 ((8 - x^{\frac{3}{2}})^2 - 64)dx$$
$$V = p\int_0^4 ((16 - x^{\frac{3}{2}} + x^3)dx$$
$$V = p(\frac{x^4}{4} - \frac{32}{5}x^{\frac{5}{2}})\Big|_0^4 = \left|p(64 - \frac{(32)^2}{5})\right|$$

4. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه محصور به منحنی های $y^2 = x$ , $y = x^2$ حول خط $x = -2$ .

حل)

$$0 \le y \le 1 , 0 \le x \le 1$$
$$V = p\int_0^1 (\sqrt{y} + 2)^2 - (y^2 + 2)^2 dy$$
$$V = p\int_0^1 (y + 2\sqrt{y} + 4) - (y^4 + 4y^2 - 4)dy$$
$$V = p(\frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}y\sqrt{y} - \frac{y^5}{5} + \frac{4y^3}{3})\Big|_0^1$$
$$V = p\,\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3}) = p(\frac{15 + 80 - 6}{30}) = \frac{89}{30}$$

5. ناحیه ای که به سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ محدود و در ربع اول است. حول محور $y$ ها دوران می کند حجم جسم حاصل را تعین کنید.

$$V = 2p\int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2p\,(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2$$

$$V = 2p\,(\frac{16}{3} - 4) = \frac{8}{3}p$$

6. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیه بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ حول خط $x = 2$ ایجاد می شود .

حل)

$$V = p\int_0^4 ((2 - \frac{y}{2})^2 - (2 - \sqrt{y})^2)dy$$

$$V = p\int_0^4 (-2y + \frac{y^2}{4} + 2\sqrt{y} - y)dy$$

$$V = p\,(\frac{y^3}{12} + \frac{4}{3}y\sqrt{y} - \frac{3}{2}y^2)\Big|_0^4 = p\,(\frac{64}{12} + \frac{32}{3} - 24)$$

$$V = \left|p\,(\frac{48}{3} - \frac{72}{3})\right| = 8p$$

7. یک دیسک به شعاع و به مرکز $(b\ ,\ 0)$ که $0 \le a \le b$ حول محور $y$ ها دوران می کند و یک چنبره تولید می کند حجم جسم آن را تعین کنید.

حل)

$$(x-b)^2+y^2=a^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{a^2-(x-b)^2}$$

$$V=4p\int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx=4p\int_{-a}^{a}(x+b)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4p\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx+4p\int_{-a}^{a} b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=8p\,b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=8p\times\frac{p\,a^2}{4}=2p^2a^2b.$$

8. ناحیه مثلثی $y=x$ , $y=0$ , $x=a>0$ حول خط $x=b>a$ دوران می کند و جسمی پدید می آورد. حجم جسم به دست آمده را حساب کنید.

حل)

$$V=p\int_{0}^{a}((b-y)^2-(b-a)^2\,dy$$

$$V=p\left(\frac{(y-b)^3}{3}-(b-a)^2y\right)\Bigg|_{0}^{a}=p\left(\frac{(a-b)^3}{3}-a(b-a)^2\right)$$

# فصل یازدهم

# صورتهای مبهم و انتگرال های ناسره

تمرین صفحه ۵۱۹ .

۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{tg^{-1}x}=\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}}=1$$

2) $$\lim_{t\to p}\frac{\sin^2 t}{t-p}=\lim_{t\to p}\frac{\sin 2t}{1}=0$$

3) $$\lim_{x\to \frac{p}{2}}\frac{\cos 3x}{p-2x}=\lim_{x\to \frac{p}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-2}=-\frac{3}{2}$$

4) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{tgx-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{\sec^2 x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos 2x}{2\sec^2 x.tgx}=+\infty$$

5) $$\lim_{x\to\infty} x(2tg^{-1}x-p)=\lim_{x\to\infty}\frac{2tg^{-1}x-p}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-2$$

6) $$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t\,e^{at}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{at}-1}{t\,e^{at}}=\lim_{t\to 0}\frac{a\,e^{at}}{e^{at}+a\,t\,e^{at}}=a$$

7) $$\lim_{x\to 0^+}(\csc x)^{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^+}e^{-\sin^2 x\,Lnx}=e^0=1$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin t-\sin 3t}{3tg\,t-tg\,3t}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos t-3\cos 3t}{3\sec^2 t-3\sec^2 3t}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin t+3\sin 3t}{2\sec^2 t.tg\,t-6\sec^2 3t.tg3t}=-\frac{8}{16}$$

9) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}$$

10) $$\lim_{x\to 1}\frac{Ln(e\,x)-1}{\sin p\ x}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,e+Ln\,x-1}{\sin p\ x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{p\ \cos p\ x}=\frac{-1}{p}$$

11) $$\lim_{r\to\frac{p}{2}}\frac{Ln\sin r}{\cos r}=\lim_{r\to\frac{p}{2}}\frac{\cot r}{-\sin r}=0$$

12) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\,Lnx}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{Lnx}{\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x\sqrt{x}}}}=1$$

13) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{Lnx}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{Lnx+1-x}{(x-1)\,Lnx}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{Lnx+\frac{x-1}{x}}=\lim\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$$

14) $$\lim_{t\to 0}(\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0} e^{\frac{Ln\cos 2t}{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0} e^{\frac{-2tg\,2t}{2t}}=e^{-2}$$

۱۵. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$ مشروط بر اینکه $f$ دو بار مشتق پذیر باشد.

حل )

حد $$=\lim\frac{f'(x+h)-2f'(x)-f'(x-h)}{2h}=\lim\frac{f''(x+h)-2f''(x)+f''(x-h)}{2}=0$$

16) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{k=1}^{n}x^k-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\frac{1-x^n}{1-x}-n}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(n+1)x^n-1-n}{2(x-1)}$$

$$=\lim\frac{n(n+1)x^{n-1}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

17) $$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-x}{1-x+Log\,x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x\,Lnx}-x}{1-x-Log\,x}$$

$$=\lim\frac{(1+Lnx)\,e^{x\,Lnx}-1}{-1+\frac{1}{Ln10}.\frac{1}{x}}=0$$

18) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}2x-2\sin^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\times(-\frac{1}{2})(-8x)}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\times(-\frac{1}{2})(-2x)}{(1-x^2)^3\,2}}{6x}$$

$$=\frac{8-2}{6}=1$$

19) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}(a\,tg^{-1}\frac{\sqrt{x}}{a}-b\,tg^{-1}\frac{\sqrt{x}}{b})$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{a^2}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\frac{x}{b^2}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2})}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2})$$

20) $$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x+a}}} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{a}{\sqrt{2a}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a}}$$

۲. ثابت های $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$$

حد $$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x} = 1 \quad \Rightarrow \quad b=1 \ , \quad a=4$$

تمرین صفحه ۵۲۸ .

۱. تابع $f$ در بازه $[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

نوع و مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ را تعیین کنید.

حل) انتگرال ناسره نوع دوم است و مقدار آن برابر زیر است

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

۲. نشان دهید انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ همگراست، اگر $p>1$ باشد

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

اگر $p>1$ ، توان $x$ در صورت منفی است پس در این حالت

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p}$$

۳. مقداری برای $n$ پیدا کنید که به ازای آن انتگرال $\int_1^{+\infty}(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n})$ همگرا باشد.

به ازای مقدار $n$ بدست آمده انتگرال را حساب کنید.

$$\int_1^{+\infty}(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n})\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{\pm}(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n})\,dx$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(Ln\,(t+1)^n-\frac{3}{4}Ln\,(2t^2+n))-A$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\ Ln\frac{(t+1)^n}{(2t^2+n)^{\frac{3}{4}}}-A$$

$$\Rightarrow n=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{I}=Ln\frac{1}{\sqrt[4]{8}}-Ln\frac{\sqrt{8}}{(\frac{7}{2})\frac{3}{4}}$$

۴) نوع انتگرال $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$ را تعیین کنید.

حل) این انتگرال همگراست چون $\frac{1}{(1+x^2)^3}\le\frac{1}{1+x^2}$ , $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ همگراست، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

۵) نوع انتگرال $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}\sec x\,dx$ را تعیین کنید.

$$\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}}\sec x\,dx=\lim_{t\to\frac{p}{2}^-}\int_{\frac{p}{4}}^{t}\sec x\,dx=\lim_{t\to\frac{p}{2}^-}\ Ln|\sec t+tg\,t|-A=+\infty$$

انتگرال واگراست.

۶. به ازای مقادیر مختلف $n$ نوع انتگرال های زیر را بررسی کنید:

الف) $\mathrm{I}=\int_0^1 x^n\,dx$ برای $n>-1$ همگرا و برای $n\le-1$ واگراست.

ب) $I=\int_0^1 x^n Ln^2 x\,dx$

۷. نوع انتگرال های زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ واگراست چون $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ و می دانیم $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ واگراست.

ب) $\int_0^1\frac{dx}{x\cos x}$ واگراست چون $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x\cos x}}{\frac{1}{x}}=1$ و $\int_0^1\frac{dx}{x}$ واگراست، طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال داده شده واگراست.

ج) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+Lnx}$ ، همگراست، زیرا داریم : $\frac{1}{x^2+Lnx}\le\frac{1}{x^2}$ و انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

د) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ .

برای $0<x<1$ داریم $x^3<x^2$ پس $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

اما انتگرال $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ همگراست، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

ه) $\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}$ همگراست، چون $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$ اما انتگرال $\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، پس انتگرال داده شده همگراست.

و) $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos x}{x}dx$ واگراست. چون $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ اما انتگرال $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{x}$ واگراست، پس طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال واگراست.

۸. فرض کنید $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$ ، در این صورت ثابت کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{p}$ ب) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{p}}{4}$

حل)

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$$

الف)
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 2\times\frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{p}$$

ب) از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} x.x e^{-x^2}\, dx = \frac{-x}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{p}}{4}$$

۹. تابعی نظیر $f$ طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا ولی $\lim \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = 0$ .

حل) تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ را در نظر بگیرید.

۱۰. ثابت کنید انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-x}\, x^t\, dx$ به ازای هر $t$ حقیقی همگراست.

حل) چون $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^t\, e^{-x}}{e^{-2x}} = 0$ و انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-2x}\, dx$ همگراست. پس انتگرال داده شده همگراست.

۱۱. تابع گاما. $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{s-1}\,dt$ تابع گاما است.

ثابت کنید.

الف) تابع $\Gamma(s)$ به ازای هر $s>0$ همگراست.

حل) با توجه به تمرین ۱۰ این تابع برای هر $s$ همگراست.

ب) نشان دهید $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ .

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x}\,dt=-t^{x}e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} x\,t^{x-1}e^{-t}\,dt=0+\Gamma(x)$$

ج) $\Gamma(n+1)=n!$ .

حل) طبق قسمت ب داریم:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\Gamma(n-1+1)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\ldots1=n!$$

د) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{p}}{2}$ ، نشان دهید

$$\Gamma(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{p}}{2} \quad , \quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{p}$$

حل) $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}.e^{-t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{\sqrt{p}}{2}$

تساوی اخیر از تمرین ۸ بدست می آید.

$$\Gamma(\frac{2}{3})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

۱۲. نوع انتگرال های زیر را معلوم کنید.

الف) $\int_1^{+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ این انتگرال واگراست چون $\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$

طبق آزمون مقایسه چون انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ واگراست، انتگرال بزرگتر واگراست.

ب) $\int_1^{+\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}$ انتگرال همگراست چون $\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\le\frac{1}{x^3}$

و انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ همگراست. طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

# فصل دوازدهم

## اعداد مختلط

# فصل دوازدهم

# اعداد مختلط

**تمرین صفحه ۵۳۵ .**

**۱. جوابهای حقیقی معادله زیر را بیابید.**

**حل)**

$$(4+2i)\,x+(5-3i)\,y=13+i$$

$$(4x+5y)+(2x-3y)\,i=13+i$$

$$\begin{cases}4x+5y=13\\2x-3y=1\end{cases}\Rightarrow \qquad y=1 \quad , \qquad x=2$$

**۲. حاصل عبارات زیر را بدست آورید:**

الف) $$Z=\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{2\mathbf{o}}{4+3i}=\frac{(5+5i)\,(4+3i)+2\mathbf{o}(3-4i)}{(3-4i)4+3i)}$$

$$=\frac{5+35i+6\mathbf{o}-8\mathbf{o}\,i}{24-7i}=\frac{65-45i}{24-7i}$$

ب) $$\frac{(1+i)\,(1+2i)}{1-i}+i=\frac{-1+3i+1+i}{1-i}=\frac{4i}{1-i}=\frac{(4i\ \,(1+i)}{2}=-2+2i$$

ج) $$\frac{3i^{3\mathbf{o}}-i^{19}}{2i-1}=\frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9\,i}{2i-1}=\frac{-3+i}{2i-1}=\frac{-3}{5}-\frac{1}{5}i$$

**۳. جواب دستگاه زیر را بدست آورید.**

$$\begin{cases}(1+i)Z_1-i\,Z_2=2+i\\(2+i)\,Z_1+(2-i)\,Z_2=2i\end{cases}$$

**حل) از روش کرامر استفاده می کنیم.**

$$Z_1=\frac{\begin{vmatrix}2+i & -i\\ 2i & 2-i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+i & -i\\ 2+i & 2-i\end{vmatrix}}=\frac{5-2}{3+i-1+2i}=\frac{3}{3i-2}$$

$$Z_2=\frac{\begin{vmatrix}1+i & 2+i\\ 2+i & 2i\end{vmatrix}}{3i-2}=\frac{2i-2-3-4i}{3i-2}=\frac{-5-2i}{3i-2}$$

**تمرین صفحه ۵۳۷ .**

**فرض کنید $a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + ... + a Z + a_0 = 0$ که در آن برای $0 \le i \le n$ , $a_i \in R$ ، ثابت کنید $\bar{Z}$ ریشه معادله فوق است.**

**حل)**

$$\overline{a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + ... + a_1 Z + a_0} = 0$$
$$\bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{\bar{n}-1} \bar{Z}^{n-1} + ... + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 = 0$$
$$a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + ... + a_1 \bar{Z} + a_0 = 0$$

**پس $\bar{Z}$ ریشه معادله است.**

**تمرین صفحه ۵۳۸ .**

**۱. فرض کنید $Z_1, Z_2 \in R$ , $Z_2 \neq 0$ ثابت کنید**

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

**حل)**

$$\overline{(\frac{Z_1}{Z_2})} = \overline{(Z_1 Z_2^{-1})} = \overline{Z_1}\ \overline{Z_2^{-1}}$$
$$= \overline{Z_1}\ \overline{Z_2}^{-1} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

**۲. عبارات زیر را ساده کنید.**

**الف)** $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

$$= \frac{(8-i)(1+2i)}{1-2i+i^2} = \frac{10+15i}{-2i} = -\frac{15}{2} + 5i$$

**ب)** $\dfrac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}} = \dfrac{1+i+1}{2-i-1+i} = 2+i$

**ج)** $3(\dfrac{1+i}{1-i})^2 - 2(\dfrac{1-i}{1+i})^3 = 3(\dfrac{2i}{-2i}) - 2(\dfrac{2i}{-2i})(\dfrac{1-i}{1+i})$

$$= -3 + (\frac{1-i}{1+i}) = -3 - i$$

**۳. درستی های زیر را ثابت کنید.**

**الف)** $Z + \overline{Z} = 2\operatorname{Re}(Z)$

**حل)** $(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im}(Z)i) + (\operatorname{Re}(Z) - \operatorname{Im}(Z)i) = 2\operatorname{Re}(Z)$

**ب)** $Z - \overline{Z} = 2\operatorname{Im}(Z)i$

$$(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im} Z\, i) - (\operatorname{Re} Z - \operatorname{Im} Z\, i) = 2\operatorname{Im}(Z)i$$

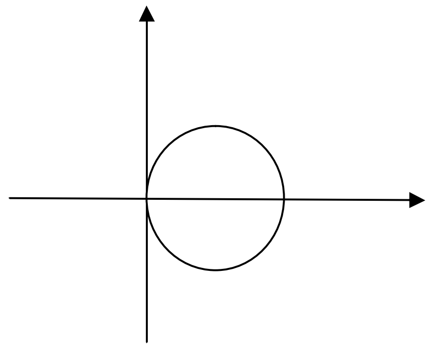
**۴. با فرض** $Z = x + yi \neq 0$ **نمودار** $\operatorname{Re}(\frac{1}{Z}) = \frac{1}{2}$ **را رسم کنید.**

**حل)**

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

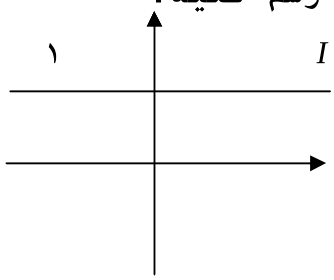
$$Re\left(\frac{1}{Z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \quad x^2+y^2=2x$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2+y^2=1$$



۵. در تمرین ۴ نمودار $Im(Z)=1$ را رسم کنید.

حل) $Im(x+yi)=y=1$




۶. فرض کنید $\sum_{k=0}^{100} i^k = x+yi$ ، در این صورت $y, x$ را محاسبه کنید.

حل) طبق تصاعد هندسی داریم:

$$\sum_{k=0}^{100} i^k=\frac{1-i^{101}}{1-i}=\frac{1-i}{1-i}=1=x+yi \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad , \quad y=0$$

۷. اگر $\frac{x+yi}{x-yi}=x-yi$ مقادیر حقیقی $x$ و $y$ را بیابید.

حل)

$$x+yi=(x-yi)^2 \;=x^2+(-yi)^2-2x\;yi$$
$$=(x^2-y^2)-2x\;yi$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=x \\ -2xy=y \end{cases}$$
$$y=0 \quad \Rightarrow \quad x=0\,,\ x=1$$
$$y\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}\,,\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸. اگر $f$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی باشد؛ نشان دهید. $\overline{f(Z)}=f(\overline{Z})$

$$f(Z)=a_n\,Z^n+a_{n-1}\,Z^{n-1}+\ldots+a_1Z+a_0$$
$$\overline{f(Z)}=\overline{a}_{\overline{n}}\,\overline{Z}^n+\overline{a}_{n-1}\,\overline{Z}^{n-1}+\ldots+\overline{a}_1\overline{Z}+\overline{a}_0$$
$$=\overline{a}_n\,\overline{Z}^n+\overline{a}_{n-1}\,\overline{Z}^{n-1}+\ldots+\overline{a}_1\overline{Z}+\overline{a}_0$$
$$=a_n\,\overline{Z}^n+a_{n-1}\,\overline{Z}^{n-1}+\ldots+a_1\,\overline{Z}+a_0=f(\overline{Z})$$

تمرین صفحه ۵۴۰ .

فرض کنید $Z_1=a_1+b_1i$ , $Z_2=a_2+b_2i$ با در نظر گرفتن نمایش هندسی اعداد $Z_1\,,Z_2$ ، ثابت کنید

$$Z_1+Z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

حل) اگر $Z_1\,,Z_2$ را به صورت بردار $(a_1\,,b_1)\,,(a_2\,,b_2)$ در نظر بگیریم، آنگاه $Z_1+Z_2=(a_1+a_2\,,b_1+b_2)$ .

و این خاصیت از جمع بردارها در $R^2$ نتیجه می شود.

تمرین صفحه ۵۴۳ .

۱. فرض کنید $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ اعداد مختلط باشند. در این صورت خواص زیر برقرارند.

الف) $|Z_1 Z_2 ... Z_n| = |Z_1||Z_2|...|Z_n|$

حل) با استفاده از استقراءِ داریم:

$$|Z_1 Z_2 ... Z_n| = |Z_1(Z_2 Z_3 ... Z_n)| = |Z_1||Z_2 Z_3 ... Z_n| = |Z_1||Z_2|...|Z_n|$$

ب) $|Z^n| = |Z|^n$

حل) کافی است در قسمت قبل قرار دهیم:

$$Z_1 = Z_2 = ... = Z_n = Z$$

ج) $\mathrm{Re}(Z) \le |Z|$

حل)

$$Z = x + yi \qquad \Rightarrow x \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2} = |Z| \qquad \Rightarrow \mathrm{Re}(Z) \le |Z|$$

د) $|Z| = |\bar{Z}|$

حل) اگر قرار دهیم:

$$Z = x + yi$$

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x - yi| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} \quad \Rightarrow \quad |Z| = |\bar{Z}|$$

ه) $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

حل) اگر $Z_2$ , $Z_1$ را به عنوان دو بردار در $R^2$ در نظر بگیریم داریم:

$$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| \cos q$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2|^2 \le |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| = (|Z_1| + |Z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$$

و) $|Z_1 + Z_2 + ... + Z_n| \le |Z_1| + ... + |Z_n|$

حل) با استقراء و استفاده از قسمت (ه) مطلب ثابت می شود.

$$|Z_1+Z_2+\ldots+Z_n| = |Z_1+(Z_2+\ldots+Z_n)|$$
$$\le |Z_1| + |Z_2+\ldots+Z_n| \le |Z_1| + |Z_2| + \ldots + |Z_n|$$

ز) $|Z_1+Z_2| \ge |Z_1| - |Z_2|$ یا $|Z_1-Z_2| \ge |Z_1| - |Z_2|$

حل)

$$|Z_1| = |(Z_1+Z_2)+(-Z_2)| \le |Z_1+Z_2| + |Z_2| \le |Z_1+Z_2| + |Z_2|$$
$$\Rightarrow \quad |Z_1| - |Z_2| \le |Z_1+Z_2|$$

اگر $Z_2$ را به $-Z_2$ تبدیل کنیم داریم:

$$|Z_1| - |Z_2| \le |Z_1 - Z_2|$$

۲. اگر $Z_1 = 2+i$ و $Z_2 = 3-2i$ و $Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ اعداد مختلط باشند؛ هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

الف) $|3Z_1 - 4Z_2|$

حل) $3Z_1 - 4Z_2 = -6 + 11i \quad \Rightarrow |3Z_1 - 4Z_2| = \sqrt{157}$

ب) $A = \left| \dfrac{2Z_2 + Z_2 - 5 - i}{2Z_1 - Z_2 + 3 - i} \right|^3$

حل)

$$2Z_2 + Z_1 - 5 - i = 3 - 4i$$
$$2Z_1 - Z_2 + 3 - i = 4 + 3i$$
$$\Rightarrow \quad A = \frac{|3-4i|^3}{|4+3i|^3} = \frac{(\sqrt{25})^3}{\sqrt{25}^3} = 1$$

۳. آرگومان اصلی و طول اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $1-i \quad \Rightarrow \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad , \quad \mathrm{Arg}\,(1-i) = -\frac{p}{4}$

ب) $-1+i \quad \Rightarrow \quad |-1+i| = \sqrt{2} \quad , \quad Arg\,(-1+i) = \frac{3p}{4}$

ج) $1 \quad \Rightarrow \quad |1| = 1 \quad , \quad Arg\,(1) = 0$

د) $2i \quad \Rightarrow \quad |2i| = 2 \quad , \quad Arg\,(2i) = \frac{p}{2}$

۴. فرض کنید $Z = x + yi$ و $|Z-1+i| = 1$ ، مکان $Z$ را تعیین کنید.

حل)

$$Z - 1 + i = (x-1) + (y+1)i$$
$$\Rightarrow \quad |Z-1+i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

مکان دایره ای به مرکز $C(1\,,\,-1)$ و شعاع $R=1$ است.

۵. مکان هندسی نقاط $Z = x + yi$ را در حالات زیر تعیین کنید.

الف) $|Z+1| = |Z-1|$

حل)

$$|(x+1) + yi| = |(x-1) + yi|$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \qquad \Rightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2$$
$$\Rightarrow x = 0$$

**ب)** $|Z+i| = |Z-1|$

**حل)**

$$|x+(y+1)\,i| = \left|(x-1)^2 + y^2\right|$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+2y+1 = x^2-2x+1+y^2$$
$$\Rightarrow \quad 2y = -2x \quad \Rightarrow \quad y = -x$$

**۶. نشان دهید که**

$$|Z_1+Z_2|^2 + |Z_1-Z_2|^2 = 2(|Z_1|^2+|Z_2|^2)$$

**حل)**

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q + |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos q$$
$$= 2(|Z_1|^2+|Z_2|^2)$$

**۷. فرض کنید $Z_3 \,, Z_2 \,, Z_1$ سه عدد مختلط نا صفر باشند به طوری که:**

$$Z_1+Z_2+Z_3 = 0 \qquad , \qquad |Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$$

**ثابت کنید.**

**الف)** $\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3} = 0$ **ب)** $Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2 = 0$

**حل) الف) رابطه $Z_i\overline{Z}_i = |Z_i|^2$ را در نظر بگیریدداریم**

$$\overline{Z}_i = \frac{|Z_i|^2}{Z_i}$$

$$Z_1+Z_2+Z_3=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_1+\bar{Z}_2+\bar{Z}_3=0$$

$$\Rightarrow \frac{|Z_1|^2}{Z_1}+\frac{|Z_2|^2}{Z_2}+\frac{|Z_3|^2}{Z_3}=0$$

$$\Rightarrow |Z_1|^2\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)=0$$

**ب) طبق قسمت الف ، با مخرج مشترک گیری داریم:**

$$\frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3}+\frac{Z_1 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3}+\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2 Z_3}=0$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 Z_2+Z_1 Z_3+Z_2 Z_3=0$$

$$Z_1+Z_2+Z_3=0 \quad \Rightarrow (Z_1+Z_2+Z_3)^2=0$$

$$\Rightarrow Z_1^2+Z_2^2+Z_3^3+2(Z_1 Z_2+Z_1 Z_3+Z_2 Z_3)=0 \Rightarrow Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=0$$

**۸. معادله زیر را بر حسب تابع مزدوج بیان کنید.**

$$2x+y=5$$

$$Z=x+yi \quad ,\bar{Z}=x-yi \quad \Rightarrow Z+\bar{Z}=2x\ ,\ \bar{Z}-\bar{Z}=2yi$$

$$\Rightarrow \quad (Z+\bar{Z})+\frac{Z-\bar{Z}}{2i}=5$$

**۹. هر عدد که ریشه معادله ای به فرم زیر باشد:**

$$a_n Z^n+a_{n-1} Z^{n-1}+\ldots+a_1 Z+a_0=0$$

**که در آن $a_i \in R$ ، یک عدد جبری نام دارد.**

**ثابت کنید $Z=\sqrt[3]{4}-2i$ جبری است.**

**حل)**

$$Z+2i=\sqrt[3]{4} \quad\Rightarrow\quad (Z+2i)^3=4$$
$$\Rightarrow\quad Z^3+6Z^2i-12Z-8i=4$$
$$\Rightarrow\quad Z^3-12Z-4=(8-6Z^2)i$$
$$\Rightarrow\quad (Z^3-12Z-4)^2=6Z^2-8$$
$$Z^6+144Z^2+16-24Z^4-8Z^3+96Z-6Z^2+8=0$$

پس $Z$ عدد جبری است.

۱۰. نشان دهید که اگر $|Z|=1$ ، آنگاه برای هر دو عدد مختلط $b,a$ که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است داریم:

$$\left|\frac{a\,Z+b}{\bar{b}\,Z+\bar{a}}\right|=1$$

حل)

$$|a\,Z+b|=\left|Z\,(a+\frac{b}{Z})\right|=|Z|\left|a+\frac{b\,\bar{Z}}{|Z|^2}\right|$$
$$=\left|a+b\,\bar{Z}\right|=\left|\bar{a}+\bar{b}\,\bar{\bar{Z}}\right|=\left|\bar{a}+\bar{b}\,Z\right|$$
$$\Rightarrow\quad \frac{|a\,Z+b|}{|\bar{a}+\bar{b}\,Z|}=\left|\frac{a\,Z+b}{\bar{a}+\bar{b}\,Z}\right|=1$$

۱۱. اگر $Z=x+yi$ نشان دهید که:

$$|Re(Z)|+|\mathrm{Im}(Z)|\le\sqrt{2}|Z|$$

حل )

$$2|Z|^2=2(\sqrt{|\mathrm{Re}(Z)|^2+|\mathrm{Im}(Z)|^2})^2$$

$$=2(|\mathrm{Re}(Z)|^2+|\mathrm{Im}(Z)|^2)\ge(|\mathrm{Re}(Z)|+|\mathrm{Im}(Z)|)^2$$

$$\Rightarrow\quad |\mathrm{Re}(Z)|+|\mathrm{Im}(Z)|\le\sqrt{2}\,|Z|$$

۱۲. نشان دهید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ اگر و تنها اگر $|Z_2| = 1 , |Z_1| = 1$

حل) فرض کنید $|Z_1| = |Z_2| = 1$ باشد آنگاه

$$|Z_1 - Z_2| = \left|Z_1 (1 - \frac{Z_2}{Z_1}\right| = |Z_1| \left|1 - \frac{Z_2 \bar{Z}_1}{|Z_1|^2}\right| = |1 - Z_2 \bar{Z}_1|$$

حال فرض کنید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ باشد.تساوی بالا را به صورت برعکس ادامه دهید .

۱۳. فرض کنید $Z \neq 0$ عدد مختلط باشد. ثابت کنید $|Z| = 1$ اگر و تنها اگر $Z = \frac{1}{Z}$

حل) اگر $|Z| = 1$ آنگاه $Z \bar{Z} = |Z|^2 = 1$ پس $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ .

اگر $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ آنگاه $|Z|^2 = Z \bar{Z} = 1$ پس $|Z| = 1$ .

۱۴. مکان عدد مختلط $Z$ را چنان پیدا کنید که اعداد مختلط $Z , iZ , i$ همواره بر یک استقامت باشند.

حل)

$$\frac{z - iZ}{Z - i} = \frac{iZ - i}{iZ - Z} \Rightarrow -(Z - iZ)^2 = i(Z - 1)(Z - i)$$

$$\Rightarrow -z^2 + 2iZ^2 + Z^2 = iZ^2 = Z = 1 - iZ$$

$$i(Z^2 + Z) = Z + 1 \qquad \Rightarrow \qquad iZ = 1$$

$$x = 0 \quad , \qquad -y = 1 \, , \qquad y = -1$$

پس $Z = 0 , Z = i , Z = -i$ بر یک استقامتند.

۱۵. اگر $C , A$ اعداد حقیقی و

$$AZ\overline{Z}+DZ+DZ+C=0\ ,\ Z=x+yi\ ,\ D=a+ib\ ,\ AC<0$$

نشان دهید مکان $Z$ دایره ای به مرکز $(-\frac{a}{A},\frac{b}{A})$ و شعاع آن به صورت زیر است.

$$R=\sqrt{\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{A^2}-\frac{C}{A}}$$

حل)

$$AZZ=A(x^2+y^2)$$
$$DZ+DZ=2Re(DZ)=2(ax-by)$$
$$\Rightarrow Ax^2+Ay^2+2ax-2by+C=0$$
$$\Rightarrow A(x+\frac{a}{A})^2+A(y-\frac{b}{A})^2-\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{A^2}+C=0$$
$$\Rightarrow (x+\frac{a}{A})^2+(y-\frac{b}{A})^2=\frac{a^2}{A^3}+\frac{b^2}{A^3}-\frac{C}{A}$$

مرکز دایره

$$(-\frac{a}{A}\ ,\ \frac{b}{A})\qquad ,\qquad R=\sqrt{\frac{a^2}{A^3}+\frac{b^2}{A^3}-\frac{C}{A}}\ .$$

۱۶. معادله خط $Ax+By+C=0$ را به شکل مختلط بنویسید.

حل) $A\frac{Z+\overline{Z}}{2}+B\frac{Z-\overline{Z}}{2i}+C=0$

۱۷. معادله دایره $x^2+y^2+2x+2y=0$ را به فرم مختلط بنویسید.

حل) $Z\overline{Z}+Z+\overline{Z}+i(Z-\overline{Z})=0$

۱۸. اگر $Z_2 , Z_1$ دو عدد مختلط باشند، به طوری که $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ ثابت کنید اختلاف آرماگون های $Z_2 , Z_1$ برابر $\frac{p}{2}$ است.

**حل)**

$$|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1 + Z_2|^2 \Rightarrow |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos a$$

$$\Rightarrow 4|Z_1||Z_2|\cos q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{p}{2}$$

۱۹. فرض کنید $b\ a\ ,Z \in C$ دو عدد حقیقی نابرابر باشند.

نشان دهید اگر $|Z + a\,i| = |Z + b\,i|$ آنگاه $Z - Z = -(a+b)\,i$

**حل)**

$$Z = x + y\,i \qquad \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a\,y = 2b\,y + b^2$$

$$(2a - 2b)\,y = b^2 - a^2 \Rightarrow y = -\frac{a+b}{2}$$

$$Z - \bar{Z} = 2\,y\,i = -(a+b)\,i$$

تمرین صفحه ٥٤٦ .

اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نمایش دهید:

الف) $Z_1 = -3 + \sqrt{3}\, i = 2\sqrt{3}\,(\cos\frac{5p}{6} + i\sin\frac{5p}{6})$

ب) $Z_2 = \frac{(i-1)^2}{i} = \frac{-2i}{i} = -2 = 2(\cos p + i\sin p)$

ج) $Z_3 = -1 - \sqrt{3}\, i = 2(\cos(-\frac{p}{3}) + i\sin(-\frac{p}{3}))$

**تمرین صفحه ۵۴۷ .**

**ثابت کنید دستور دموآور برای $n<0$ صحیح نیز برقرار است.**

**حل)** اگر قرار دهیم $n=-m\ ,\ e^{iq} = \cos q + i\sin q$ باشد آنگاه

$$Z = e^{iq} \Rightarrow Z^{-m} = e^{-imq} = \cos(-mq) + i\sin(-mq)$$

$$\Rightarrow n<0 \qquad \Rightarrow (\cos q + i\sin q)^n = \cos(nq) + i\sin(nq)$$

**تمرین صفحه ۵۴۷ .**

**اگر $Z_2\ ,\ Z_1$ دو عدد مختلط باشند و $Z_2 \neq 0$ ، ثابت کنید**

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

**حل)**

$$Z_1 = \left|Z_1\right|(\cos q_1 + i\sin q_1) \qquad , \qquad Z_2 = \left|Z_2\right|(\cos q_2 + i\sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\left|Z_1\right|(\cos q_1 + i\sin q_1)}{\left|Z_2\right|(\cos q_2 + i\sin q_2)} = \frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}(\cos q_1 + i\sin q_2)(\cos q_2 + i\sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}(\cos(q_1 - q_2) + i\sin(q_1 - q_2))$$

$$\Rightarrow Arg(\frac{Z_1}{Z_2}) = {}_1 - {}_2 = Arg\, Z_1 - Arg\, Z_2$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}\left|\cos(q_1 - q_2) + i\sin(q_1 - q_2)\right| = \frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}$$

**تمرین صفحه ۵۴۹ .**

**۱. ثابت کنید:**

$$(\frac{1 + i\,tga}{1 - i\,tga})^n = \frac{1 + i\,tgn\,a}{1 - i\,tgn\,a}$$

**حل)**

$$(\frac{1 + i\,tg\,a}{1 - i\,tg\,a})^n = (\frac{1 + i\,\frac{\sin a}{\cos a}}{1 - i\,\frac{\sin a}{\cos a}})^n = (\frac{\cos a + i\sin a}{\cos a - i\sin a}))^n$$

$$= (\frac{\cos a + i\sin na}{\cos na - i\sin na}) = \frac{1 + i\,tgna}{1 - i\,tgna}$$

**۲. فرض کنید $n$ عدد صحیح و مثبت باشد، حاصل $I = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ را محاسبه کنید.**

**حل)**

$$I=(1+i)^n\,(1-i)^{2-n}=\sqrt{2}\,(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4})^n\,\sqrt{2}\,(\cos\frac{p}{4}-i\sin\frac{p}{4})^{2-n}$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\times 2^{1-\frac{n}{2}}\,(\cos\frac{np}{2}+i\sin\frac{np}{4})\,(\cos\frac{(2-n)p}{4}-i\sin\frac{(2-n)p}{4})$$

$$=2\,(\cos\frac{np}{2}+i\sin\frac{np}{2})$$

**۳. عدد مختلط $(1+i)^n$ را به دو طریق محاسبه و نتیجه را مقایسه کنید.**

**حل)**

$$(1+i)^2=2i\qquad\Rightarrow n=2k\qquad\Rightarrow(1+i)^n=(2i)^k$$

$$n=2k+1\qquad\Rightarrow(1+i)^n=(2i)^k\,(1+i)$$

**۵. ثابت کنید.**

$$\frac{\sin 4q}{\sin q}=2\cos 3q+6\cos q-4$$

**حل)**

$$Z=\cos+i\sin q\qquad\Rightarrow Z^4=\cos 4q+i\sin 4q$$

$$((\cos^2 q-\sin^2 q)+2\sin q\cos q\;i)^2=\cos 4q+i\sin 4q$$

$$(\cos 2q+\sin 2q\;i)^2=$$

**تمرین صفحه ۵۵۶ .**

**۱- معادله $Z^2+(2i-3)Z+5-i=0$ را حل کنید.**

**حل)**

$$(Z+\frac{2i-3}{2})^2 = i-5-\frac{(2i-3)^2}{4}$$

$$(Z+\frac{2i-3}{2})^2 = \frac{4i-20+4+6i-9}{4} = \frac{10i-25}{4}$$

$$Z = \frac{3-2i}{2} \pm \sqrt{10i-25}$$

**۲- فرض کنید $(Z \neq 1)$ . در این صورت معادله زیر را حل کنید:**

$$1+Z+Z^2+Z^3+Z^4+Z^5=0$$

**حل) دو طرف را در $(1-Z)$ ضرب می کنیم.**

$$1-Z^6=0 \qquad \Rightarrow Z^6=1$$

$$W_i = \cos(\frac{kp}{3}) + i\sin(\frac{kp}{3})$$

$$W_0 = 1 \ , \qquad W_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad , \qquad W_3 = -1$$

$$W_4 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad , \qquad W_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

**ریشه $Z=1$ قابل قبول نیست. چون با ضرب $1-Z$ تولید شده است.**

**۳. اگر $W$ یکی از ریشه های موهومی، $n$ ام واحد باشد. نشان دهید:**

$$1+W+W^2+...+W^{n-1}=0$$

**حل)**

$$W \neq 1 \quad , \quad W^n = 1 \quad \Rightarrow \quad W^n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (W-1)(W^{n-1} + W^{n-2} + \dots + W + 1) = 0$$

$$W \neq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + W + W^2 + \dots + W^{n-1} = 0$$

**۴. معادله زیر را حل کنید:**

$$iZ^3 + 8 = 0 \; .$$

**حل )**

$$-Z^3 + 8i = 0 \Rightarrow Z^3 = 8i$$

$$r = 8 \quad , \quad q = \frac{p}{2}$$

$$W_k = \sqrt[3]{8}\,(\cos\frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} + i\sin\frac{2kp + \frac{p}{2}}{3}$$

$$W_0 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$

$$W_1 = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i$$

$$W_3 = -2i$$

**۵. ریشه های هر یک از اعداد زیر را بدست آورید.**

**الف )** $(-1+i)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad r = \sqrt{2} \, , \quad q = \frac{3p}{4}$

$$W_k = \sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3} + i\sin\frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3})$$
$$W_0 = \sqrt[6]{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2})$$
$$W_1 = \sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{11p}{12} + i\sin\frac{11p}{12})$$
$$W_2 = \sqrt[6]{2}\cos\frac{19p}{12} + i\,siin\frac{19p}{12})$$

ب) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{3}}$ , $r = 4$ , $q = \frac{7p}{6}$

$$W_k = \sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3} + i\sin\frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3})$$
$$W_0 = \sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{7p}{24} + i\sin\frac{7p}{24})$$
$$W_1 = \sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{19p}{24} + i\sin\frac{19p}{24})$$
$$W_2 = \sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{31p}{24} + i\sin\frac{31p}{24})$$
$$W_3 = \sqrt[4]{4}\,(\cos\frac{43p}{24} + i\sin\frac{43p}{24})$$

**۷. معادله $6Z^4 - 25Z^3 + 32Z^2 + 3Z - 10 = 0$ را حل کنید.**

**حل) مقسوم علیه های $-10$ برابر $\pm 1$ و $\pm 2$ و $\pm 5$ است.**

**مقسوم علیه های $6$ برابر $\pm 1$ و $\pm 2$ و $\pm 3$ است.**

**۱۰. معادله $(1+Z)^5 = (1-Z)^5$ را حل کنید.**

**حل)**

$$(\frac{1+Z}{1-Z})^{5}=1 \quad , \qquad W^{5}=1, \qquad W=\frac{Z+1}{Z-1}$$

$$W_{0}=1 \Rightarrow \qquad \frac{1+Z}{1-Z}=1 \qquad \Rightarrow \qquad Z_{0}=0$$

$$W_1=\cos\frac{2p}{5}+i\sin\frac{2p}{5}=\frac{1+Z_1}{1-Z_1}$$

$$W_2=\cos\frac{4p}{5}+i\sin\frac{4p}{5}=\frac{1+Z_2}{1-Z_2}$$

$$W_3=\cos\frac{6p}{5}+i\sin\frac{6p}{5}=\frac{1+Z_3}{1-Z_3}$$

$$W_4=\cos\frac{8p}{5}+i\sin\frac{8p}{5}=\frac{1+Z_4}{1-Z_4}$$

**۱۱. هر یک از عبارات زیر را ساده کنید.**

**الف )**

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}=(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}})^{\frac{1}{6}}=$$

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\ e^{-i\frac{p}{4}}}{2\ e^{-i\frac{p}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{-\frac{7p}{12}}$$

$$Z_k=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{2kp-\frac{7p}{12}}{6}+i\sin\frac{2kp-\frac{7p}{12}}{6})$$

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$$

ب) $$\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}\;e^{-i\frac{p}{4}}}{2\;e^{i\frac{p}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\;e^{-i\frac{5p}{12}}$$

$$Z_k=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,(\cos(\frac{2kp-\frac{5p}{12}}{6})+i\sin(\frac{2kp-\frac{5p}{12}}{6}))$$

**۱۲. معادله $(x+i)^n-(x-i)^n=0$ را حل کنید که در آن $x$ عدد حقیقی است.**

$$(x+i)^n-(x-i)^n=0\Rightarrow(x+i)^n-(x-i)^n$$

$$\Rightarrow(\frac{x+i}{x-i})^n=1$$

$$Z=\frac{x+i}{x-i}\qquad\Rightarrow\qquad Z^n=1$$

**حل)** $$Z_k=\cos\frac{2kp}{8}+i\sin\frac{2kp}{8}\;,\;k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$Z_k=\frac{x+i}{x-i}\qquad\Rightarrow\qquad xZ_k-iZ_k=x+i$$

$$x(Z_k-1)=i(Z_k+1)$$

$$x=i\frac{Z_k+1}{Z_k-1}\qquad\qquad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

**۱۳) منحنی ای بیابید که معادله اش $|Z+c|+|Z-c|=2a$ باشد که در آن $a\,,c$ اعداد حقیقی مثبت اند به طوری که $a>c$ .**

**حل) طبق تعریف ، معادله فوق، معادله یک بیضی است.**

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**۱۴. معادله خط مستقیم $Ax + By + C = 0$ را به شکل مختلط بنویسید.**

**حل)** $A(\frac{Z+\overline{Z}}{2}) + B(\frac{Z-\overline{Z}}{2i}) + C = 0$

**۱۵. معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $1+i \, , 2i \, , 1-i$ می گذرد.**

**حل)** فرض کنید $Z_0 = x_0 + y_0 i$ مرکز دایره باشد پس:

$$|Z_0 - (1-i)| = |Z_0 - (1+i)| = |Z_0 - 2i|$$
$$\Rightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 = (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 \Rightarrow y_0 = 0$$
$$\Rightarrow (x_0 - 1)^2 + 1 = x_0^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 - 2x_0 + 2 = x_0^2 + 4$$

مرکز دایره $C(-1\,,0)$ است.

$$R = |(-1+0) - (1-i)| = |-2+i| = \sqrt{5}$$

شعاع دایره برابر $R = \sqrt{5}$ است.

**۱۶) مکان $Z$ در هر حالت تعیین کنید.**

**الف)** $|Z-i| = 1$ : دایره به مرکز $(0,+1)$ و شعاع $R=1$ .

**ب)** $|Z-1-i| = 1$ : دایره به مرکز $(1,1)$ و شعاع $R=1$ .

**ج)** $|Z-2i| = \frac{1}{2}$ : دایره به مرکز $(0,2)$ و شعاع $R = \frac{1}{2}$ .