بسمه تـ

جزوه

آمار و احتمالات

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر عربزاده

www.jozve.org

آمار و احتمال

عربزاده

گردآورنده: مرتضی بخشعلی

احتمال یک پیشامد

می‌دانیم هر آزمایش تصادفی دارای یک فضای نمونه S است. در نظریه احتمال به هر عضو از فضای نمونه متناظر یک آزمایش تصادفی عددی را نسبت می‌دهیم که آن را «وزن» گویند و با W نمایش می‌دهند.

خصوصیات W عبارتست از:

۱) $0 \le W \le 1$

۲) $W \to 1$ اگر امکان وقوع این پیشامد بسیار زیاد باشد.

۳) $W \to 0$ اگر امکان وقوع این پیشامد بسیار کم باشد.

۴) $1 = \sum_i W_i$ (مجموع تمام وزن‌های نقاط موجود در فضای نمونه ۱ باشد.)

فضای نمونه $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ عضو $\quad n(S) = m$

$a_1 \to$ وزن W_1 $\to \frac{1}{m}$ (مثلاً)

$a_2 \to W_2 \to \frac{1}{m}$

$a_m \to W_m \to \frac{1}{m}$

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} = m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$

www.ithar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

احتمال پیشامد A

احتمال پیشامد A برابر است با مجموع وزن‌های نقاط موجود در A. احتمال A را با P(A) نشان می‌دهند.

$S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $\quad n(S) = m$

$\downarrow w_1 \quad \downarrow w_2 \quad \downarrow w_m$

$A = \{a_1, a_2, a_m\}$ زیرمجموعه‌ی فضای نمونه

$P(A) = w_1 + w_2 + w_m$

نتیجه:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(\phi) = 0$ ضعیف‌ترین پیشامد

3) $P(S) = 1$ محکم‌ترین پیشامد

احتمال تابعی است از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S به $[0,1]$.

$P : P(S) \longrightarrow [0,1] \Rightarrow P(A) = w \quad w \in [0,1]$

SAMAN

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / تاس سالمی را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. اولاً پیشامدهای ساده را بدست آورید. ثانیاً احتمال پیشامد $A = \{1,2,5\}$ را معین کنید.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\downarrow w_1 \quad \downarrow w_6$

پیشامد ساده: $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$

سالم یا هم‌تراز یا هم شانس بودن همگی به معنای هم وزن بودن نقاط فضای نمونه است.

$w_1 = w_2 = \dots = w_6$

$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1 \Rightarrow 6w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{6}$ وزن هر پیشامد ساده

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

مثال / تاس طوری اُریب (ساخته) شده که وزن هر پیشامد ساده زوج، سه برابر پیشامد ساده فرد است. این تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. اولاً احتمال پیشامد ساده را تعیین کنید. ثانیاً $P(A)$ را بیابید که در آن $A = \{1,2,5\}$ است.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\downarrow w \quad \downarrow 3w \quad \downarrow w \quad \downarrow 3w \quad \downarrow w \quad \downarrow 3w$

SAMAN

www.ithae.ir
www.iozve.org

$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1 \Rightarrow w_1 + 3w_1 + w_1 + 3w_1 + w_1 + 3w_1 = 1$

وزن پیشامدهای ساده فرد $w_1 = \frac{1}{12}$

وزن پیشامدهای ساده زوج $3w_1 = \frac{3}{12}$

$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow P(A) \neq \frac{n(A)}{n(S)}$

قضیه: اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی به صورت N پیشامد هم‌شانس ممکن باشد، $n(S) = N$، آن گاه احتمال پیشامد A که برابر با $n(A) = n$ باشد، $A \subseteq S$، خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال / می‌خواهیم یک عدد چهار رقمی را به تصادف از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بسازیم. مطلوبست احتمال اینکه این عدد چهار رقمی، رقم تکراری نداشته باشد.

تمام اعداد ۴ رقمی ممکن: $n(S) = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = (6)^4$

A پیشامد اینکه عدد ساخته شده رقم تکراری نداشته باشد.

$n(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \qquad P(A) = \frac{5 \times 4 \times 3}{6^3} = \frac{10}{36}$

مثال / می‌خواهیم یک گروه ۳ نفره را از بین ۵ دانشجو و ۶ دانش‌آموز انتخاب کنیم. مطلوبست احتمال آنکه این گروه شامل ۲ دانشجو و ۱ دانش‌آموز باشد.

$n(S) = \binom{11}{3} \qquad S = \{\{a,b,c\}, \{\ ,\ ,\ \}\}$

$n(A) = \binom{5}{2}\binom{6}{1} = 10 \times 6 = 60$

$P(A) = \frac{6 \times \cancel{10}}{11 \times \cancel{10} \times 9} = \frac{2}{33}$

یادآوری قضایای احتمال:

تعریف: پیشامد ناسازگار

پیشامد A و B را ناسازگار گوییم اگر امکان وقوع همزمان دو پیشامد به طور همزمان وجود نداشته باشد.

$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

قضیه: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن گاه:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اگر A و B ناسازگار باشند: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

www.jozve.org
www.tanar.ir

Subject:
Year: Month: Day:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

تعمیم: اگر $A_1, \dots, A_n$ ، n پیشامد ناسازگار باشند،

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

قضیه: اگر A' متمم A باشد، آنگاه:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال / احتمال اینکه از یک گروه ۴ نفره حداقل دو نفر ماه تولد یکسان داشته باشند چقدر است؟

$$n(S) = 12\times12\times12\times12 = (12)^4$$

حالت ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۲

A پیشامد اینکه هیچ دو نفری ماه تولد یکسانی نداشته باشند.

$$n(A) = 12\times11\times10\times9$$

$$P(A') = 1 - \frac{n(A)}{n(S)} = 1 - \frac{12\times11\times10\times9}{(12)^4}$$

Subject:
Year: Month: Day:

احتمال شرطی:

احتمال وقوع پیشامد B به شرط آنکه پیشامد A اتفاق افتاده باشد را احتمال شرطی گوییم و با علامت $P(B|A)$ نشان داده و داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad (P(A)>0)$$

قضیه: اگر A و B سازگار باشند، آنگاه:

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

مثال / از ظرفی که چند مهره سفید و سه مهره سیاه دارد، ۲ مهره را به اتفاق و به طور متوالی و بدون جایگذاری برمی‌داریم. مطلوبست محاسبه پیشامد اینکه هر دو مهره سفید باشند.

A پیشامد اینکه مهره اول سفید باشد B پیشامد اینکه مهره دوم سفید باشد.

C: پیشامد اینکه دو مهره جدا برداشته شوند $P(A\cap B) = ?$

$$P(A\cap B) = P(A)P(A|B) \Rightarrow P(A) = \frac{4}{7}$$

$$P(B|A) = \frac{3}{6} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$$

$$P(C) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}$$

www.ethnari.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \dots + P(A\cap B_n)$$

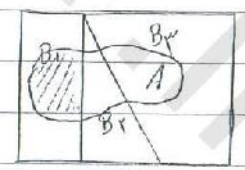
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)$$

وقتی چند محرومیت نامتناهی باشند

مثال / محصولات کارخانه‌ای توسط سه ماشین ۱، ۲، ۳ تولید می‌شوند. ماشین اول ۲۰٪ تولید را انجام می‌دهد. ماشین دوم ۳۰٪ و ماشین سوم ۵۰٪. از طرفی درصد کالای تولیدی معیوب توسط این سه ماشین به ترتیب عبارتند از ۱۵٪، ۱۰٪ و ۲٪. مطلوبست احتمال آنکه:

الف / کالایی که به تصادف اختیار می‌شود نامسالم باشد.

ب / اگر یک کالا که به تصادف انتخاب می‌شود نامسالم باشد، مطلوبست احتمال آنکه این کالا توسط ماشین اول تولید باشد.



B_i: پیشامد اینکه کالا توسط ماشین i ام تولید شود. $i = 1, 2, 3$

A: پیشامد اینکه کالای تولیدشده نامسالم باشد.

AMAND

Subject:
Year: Month: Day:

الف / $P(A) = ?$ ب / $P(B_i|A)$

الف / $A = \bigcup_{i=1}^{3} (A\cup B_i) \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A\cap B_i)$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$$

$P(A|B_1) = 0.15$ $P(A|B_2) = 0.10$ $P(A|B_3) = 0.02$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} P(A) = (0.2\times 0.15) + (0.3\times 0.10) + (0.5\times 0.02) = 0.07$

ب / $P(B_1|A) = \dfrac{P(A\cap B_1)}{P(A)} = \dfrac{0.2\times 0.15}{0.07}$

مثال: سه ظرف کاملاً یکسان با محتویات زیر وجود دارد.

	ظرف ۱	ظرف ۲	ظرف ۳
سفید	۱	۲	۳
سیاه	۲	۱	۲
قرمز	۳	۱	۱

یک ظرف را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. می‌بینیم که مهره سفید است. مطلوبست احتمال اینکه این مهره از ظرف اول باشد.

AMAND

www.itnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

B_i: پیشامد اینکه ظرف iام انتخاب شده.

A: پیشامد اینکه مهرهٔ خارج شده از ظرف سفید باشد. $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\dots$$

$$P(A|B_1)=\frac{1}{6} \qquad P(A|B_2)=\frac{2}{4} \qquad P(A|B_3)=\frac{3}{7}$$

$$P(B_1|A)=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}}$$

مثال/ سه ظرف یکسان با محتویات زیر وجود دارد.

	۱	۲	۳
نوع سکه	۱	۲	۳
طلا	۱	۲	۰
نقره	۱	۰	۲

یکی از این سه ظرف را به تصادف انتخاب کرده و یک سکه خارج می‌کنیم. مشاهده می‌شود سکه طلا است.

مطلوبست احتمال آنکه این ظرف، ظرف اول باشد. (یا سکهٔ دیگر این ظرف نقره باشد)

A: پیشامد طلا بودن سکه نکته: پیشامد اینکه ظرف iام اختیار شود

SAMANE

Subject:
Year: Month: Day:

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0}=\frac{1}{3}$$

$P(B_i)=\frac{1}{3}$ $(i=1,2,3)$

$P(A|B_1)=\frac{1}{2}$ $\qquad P(A|B_2)=1$ $\qquad P(A|B_3)=0$

مثال/ از ظرفی که a مهرهٔ سفید و b مهرهٔ سیاه دارد، یک مهره را به تصادف خارج کرده و بدون مشاهدهٔ رنگ این مهره را کنار می‌گذاریم. سپس از ظرف حاصل یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه

الف/ مهره سفید باشد. $\qquad A$: پیشامد اینکه مهرهٔ اول سفید باشد.

ب/ مهره سیاه باشد. $\qquad B$: پیشامد اینکه مهرهٔ اول سیاه باشد. $A'=$

C: پیشامد اینکه مهرهٔ دوم سفید باشد.

$$\underset{B\,\text{یا}\,A}{P(C|(A\cup B))}=?=\frac{P(C\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=P((C\cap A)\cup(C\cap B))$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$$

SAMANE

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$(C\cap A)$ و $(C\cap B)$ ناسازگارند چون A و B متمم یکدیگرند.

$$P(C|(A\cup B)) = P((C\cap A)\cup(C\cap B))$$

$$= P(A\cap C) + P(B\cap C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}\right) + \left(\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}\right) = \frac{a}{a+b}$$

تمرین / از ظرفی که A مهرهٔ سفید و B مهرهٔ سیاه دارد، ۱ مهره را به تصادف اختیار کرده و پس از مشاهدهٔ رنگ آن، این مهره را با C مهرهٔ همرنگش به ظرف اضافه کرده و سپس از این ظرف یک مهره اختیار کنیم، احتمال سیاه بودن مهره چیست؟

Subject:
Year: Month: Day:

تابع متغیر تصادفی:

می‌دانیم هر آزمایش تصادفی دارای فضای نمونه‌ای S است.

تعریف: تابعی که از فضای نمونه یک آزمایش تصادفی (مجموعهٔ S) به مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شود (مجموعهٔ R) را تابع متغیر تصادفی گوییم و با علامت X، Y و ... نشان می‌دهیم.

در واقع داریم: $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

متغیر تابع متغیر تصادفی نوعی که اندازه است. با این که اندازه‌ها پیشامدها به عدد تبدیل می‌شوند.

تابع متغیر تصادفی به گونه‌ای تعریف می‌شود که مشخص کنندهٔ هدف آزمایش نیز باشد.

مثال / سکه‌ای را ۲ مرتبه پرتاب می‌کنیم. درصورتی که هدف از این آزمایش شمارش تعداد روی سکه باشد. تابع متغیر تصادفی تعیین کنید که مشخص کنندهٔ این هدف باشد.

$S = \{TT, TH, HT, HH\}$

X: تعداد دفعهٔ تولد رو شدن سکه در این آزمایش.

www.itnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$X(TT) = 0$

$X(TH) = 1$

$X(HT) = 1$

$X(HH) = 2$

به این تابع متغیر تصادفی مشاهدات می‌گویند و با علامت X نشان می‌دهند.

برد $X = \{0, 1, 2\}$

هر کدام از این اعداد یا مشاهدات نمایندهٔ یک پیشامد می‌باشند

$0 \longrightarrow \{TT\}$ $\quad 1 \longrightarrow \{TH, HT\}$ $\quad 2 \longrightarrow \{HH\}$

تمرین: سکه‌ای را ۳ مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتیکه هدف از این آزمایش شمارش تعداد "رو"های سکه باشد، تابع متغیر تصادفی X را بگونه‌ای تعریف کنید که مشخص کند تا این هدف باشد.

$X : X = \{0, 1, 2, 3\}$

Subject:
Year: Month: Day:

فضای نمونه‌ای

۱- فضای نمونه‌ای گسسته ۲- فضای نمونه‌ای پیوسته

اگر تعداد عضوهای مجموعهٔ S متناهی یا نامتناهی قابل شمارش باشد، فضای نمونه‌ای را گسسته می‌گوییم.

اگر S نامتناهی غیرقابل شمارش باشد، فضای نمونه‌ای پیوسته است.

هر فضای نمونه‌ای که قابل شمارش باشد گسسته و هر فضای نمونه‌ای غیرقابل شمارش پیوسته است.

زمان طول عمر، قد، وزن و ... غیرقابل شمارش و پیوسته‌اند.

متغیرهای تصادفی خود دو دسته‌اند. گسسته و پیوسته.

فضای نمونه‌ای گسسته است — فضای نمونه‌ای پیوسته است

www.ithae.ir

www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

متغیرهای تصادفی گسسته و تابع توزیع احتمال

یک متغیر تصادفی گسسته مانند X هر کدام از مقادیر (مشاهدات) را با احتمالی اختیار می‌کند (هر مشاهده مانند یک پیشامد است و هر پیشامد دارای یک مقدار احتمال است.)

تابع احتمال: جدول یا فرمولی که مقادیر یک متغیر را با احتمالهای مربوط به آن نشان دهد، تابع احتمال گویند و با علامت تابعی $f_X(x)$ یا $f_Y(y)$ نشان می‌دهند.

مثال: سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتی که هدف از این آزمایش شمارش تعداد "رو"های سکه باشد:

اولاً تابع متغیر تصادفی X را بگونه‌ای تعریف کنید که این هدف را نشان دهد.

ثانیاً برای این متغیر تصادفی، یک تابع احتمال به صورت جدول و فرمول بنویسید.

X: نشان دهنده تعداد رو $\quad x = 0, 1, 2, 3$

$0 \to \{TTT\} \qquad 1 \to \{TTH, THT, HTT\}$

Subject:
Year: Month: Day:

$2 \to \{HHT, HTH, THH\} \qquad 3 \to \{HHH\}$

$P(X=0) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = P(\{TTH, \dots\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = P(\{HHT, \dots\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$

x	0	1	2	3
$P(X=x) = f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{2^3} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

نکته: برای پرتاب n سکه خواهیم داشت:

$$f_X(x) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$$

"تعداد x موفقیت در n پرتاب"

www.ithai.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

x ها را رسم کنیم.

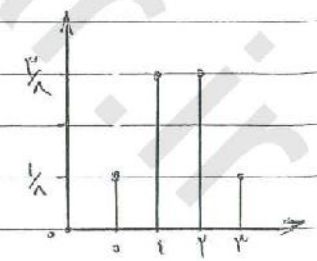
طرز رسم نمودار مستطیلی:

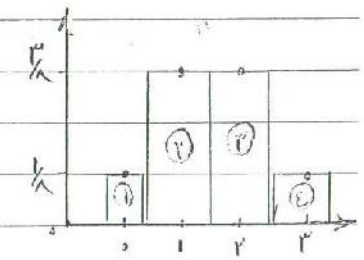
کافیست زوج مرتب $(x, f(x))$ را در صفحهٔ مختصات مشخص کرده و روی این نقاط مستطیل‌هایی به عرض یک و طول $f(x)$ بسازیم.

مثال/ سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. در صورتی که متغیر تصادفی X نشان‌دهندهٔ تعداد "رو" در این آزمایش باشد، نمودار میله‌ای و مستطیلی $f_X(x)$ را رسم نمائید.

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{2^3} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$





Subject:
Year: Month: Day:

مساحت مستطیل ۱: $1 \times \frac{1}{8} = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{8}(0.5 + 0.5) = \frac{1}{8}$

مساحت مستطیل ۲: $1 \times \frac{3}{8} = \int_{0.5}^{1.5} \frac{3}{8}\,dx = \frac{3}{8}(1.5 - 0.5) = \frac{3}{8}$

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای گسسته)

تعریف: اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی این متغیر را با علامت $F_X(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

مثال/ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$ است. تابع توزیع تجمعی را برای این متغیر رسم کنید. $(x = 0, 1, 2, 3)$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \longrightarrow 0 \\ f(0) & 0 \leq x < 1 \longrightarrow \frac{1}{8} \\ f(0) + f(1) & 1 \leq x < 2 \longrightarrow \frac{4}{8} \\ f(0) + f(1) + f(2) & 2 \leq x < 3 \longrightarrow \frac{7}{8} \\ f(0) + f(1) + f(2) + f(3) & 3 \leq x \longrightarrow 1 \end{cases}$$

www.ethar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

خصوصیات تابع توزیع تجمعی :

تابع $f_X(x)$ دارای خصوصیات زیر است :

1) $\forall x \,,\ 0 \leq f_X(x) \leq 1$

2) $\lim_{x \to -\infty} f_X(x) = 0 \,,\quad \lim_{x \to +\infty} f_X(x) = 1$

3) تابعی غیر نزولی و پیوسته است .

تغییر کلی تصادفی پیوسته و تابع چگالی احتمال :

احتمال اینکه یک تغییر تصادفی پیوسته دقیقاً یکی از مقادیر خود مانند $x = a$ را اختیار کند

صفر است . به عبارت دیگر داریم :

$P(x = a) = 0$

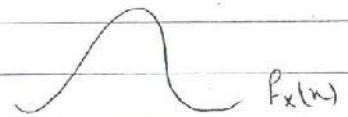
در نتیجه احتمال در یک بازه مطرح نمی‌شود .

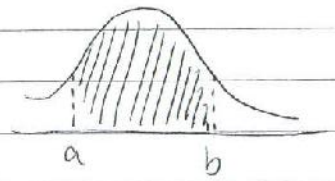
$P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b)$

$P(a \leq x \leq b) = P(x = a) + P(x = b) + P(a < x < b)$

Subject:
Year: Month: Day:

در چنین حالتی تابع احتمال یک تابع پیوسته یا پیوسته تکه‌ای است که آن را چگالی احتمال گویند .





$$P(a < x < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

خصوصیات $f_X(x)$ در حالت پیوسته :

1) $\forall x \,,\ f_X(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

3) $P(a < x < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

سؤال : آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{در بقیه} \end{cases}$ تابع احتمال است ؟

1) $f_X(x) \geq 0$ ✓ 2) $\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx = 1$ ✓

یک تابع توزیع احتمال است .

www.ttnar.ir
www.jozve.org

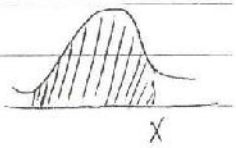
Subject:
Year: Month: Day:

به طور کلی هر تابعی که دو شرط $f_X(x) \geq 0$ و $\sum_X f(x) = 1$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1\right)$ را داشته باشد، تابع احتمال است.

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای پیوسته)

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع توزیع تجمعی X را به صورت $F_X(x)$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$



به طور کلی هر تابع توزیع تجمعی عبارتست از:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{t \leq x} f(t) \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx \end{cases}$$

خصوصیت $F_X(x)$:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

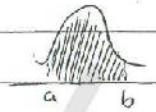
2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

در حالت پیوسته احتمال برابر است: $P(a<x<b) = F_X(b) - F_X(a)$

$$P(a<x<b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$



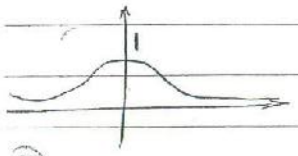
نکته: تابع توزیع تجمعی، تابع اولیه تابع احتمال است.

مثال/ متغیر تصادفی X طبق تابع احتمالی به صورت $f_X(x) = \begin{cases} kx^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در سایر مکان‌ها} \end{cases}$ است. مقدار ثابت k را تعیین کنید.

$$\int_0^1 kx^3\,dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}kx^4\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow k = 4$$

مثال/ متغیر تصادفی X طبق تابع احتمال به صورت $f_X(x) = \frac{k}{1+x^2}$ است. مقدار ثابت k را تعیین کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}\,dx = 1 \Rightarrow k\,\mathrm{tg}^{-1}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\pi}$$



تابع احتمال کوشی $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $x \in \mathbb{R}$

SAMAND

www.ethar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

فضای نمونه‌ای دو بعدی (یا بیشتر) و تابع احتمال توأم:

یعنی در آزمایش‌های تصادفی که دو متغیر مطرح باشند که آزمایش کننده هم‌زمان می‌تواند دو هدف (یا بیشتر) را پیگیری کند.

مثال ۱: از ظرفی که شامل ۵ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۶ مهرهٔ آبی است، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی‌گزینیم.

آزمایش‌گر می‌تواند یک هدف را دنبال کند مثلاً تعداد مهره‌های سفید. می‌تواند همزمان دو هدف را پیگیری کند مثلاً تعداد مهره‌های سفید و سیاه و همچنین می‌تواند سه هدف را نیز دنبال کند. تعداد مهره‌های سفید، سیاه و آبی.

اگر هدف را با یک متغیر نشان دهیم، آن‌گاه می‌توانیم از چند متغیر به طور همزمان صحبت کنیم.

بطور کلی اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند بطوریکه احتمال وقوع این دو متغیر بطور همزمان وجود داشته باشد، آنگاه تابع احتمال وقوع همزمانی این دو متغیر را تابع احتمال توأم نامیده و با علامت تابعی $f_{X,Y}(x,y)$ نشان می‌دهیم.

Subject:
Year: Month: Day:

تابع احتمال توأم:

جدول یا فرمولی که مقادیر دو متغیر تصادفی X و Y را به طور همزمان همراه با احتمال‌های آنها نشان دهد را تابع احتمال توأم گوییم و با علامت تابعی $f_{X,Y}(x,y)$ نشان می‌دهیم و به حالت گسسته:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

خصوصیات تابع احتمال توأم:

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y$

2) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

www.ittlan.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مورد توابع دو متغیره را بررسی می‌کنیم. انتگرال دوگانهٔ توابع دو متغیره حجم زیر منحنی را بدست می‌دهد.

مثال ۱) از ظرفی که ۵ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی دارد، سه مهره را به تصادف و به طور همزمان اختیار می‌کنیم. در صورتیکه متغیر تصادفی X تعداد مهره‌های سفید را نشان دهد، تابع احتمال X یا $f_X(x)$ را تعیین کنید.

$$f_X(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{7}{3-x}}{\binom{12}{3}} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

مثال ۲) اگر در مثال ۱ متغیر Y را نشانگر تعداد مهره‌های سیاه تعریف کنیم، تابع احتمال Y را بیابید.

$$f_Y(y) = \frac{\binom{4}{y}\binom{8}{3-y}}{\binom{12}{3}} \qquad y = 0, 1, 2, 3$$

مثال ۳) اگر در مثال ۱ متغیر تصادفی X تعداد مهرهٔ سفید و Y را نشانگر تعداد مهرهٔ سیاه تعریف کنیم، تابع احتمال توأم X و Y را تعیین کنید.

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

Subject:
Year: Month: Day:

مهره $\to$ ۳ $\to$ X تا سفید، Y تا سیاه، $3-x-y$ بقیه رنگ

$$f_{X,Y} = P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}$$

$$D_f = \{(x,y) \mid 0 \le x+y \le 3,\ x,y \in \{0,1,2,3\}\}$$

y \ x	0	1	2	3
0	$f(0,0)$	$f(1,0)$	$f(2,0)$	$f(3,0)$
1	$f(0,1)$	$f(1,1)$	$f(2,1)$	0
2	$f(0,2)$	$f(1,2)$	0	0
3	$f(0,3)$	0	0	0

مثال ۴) اگر در مثال ۱ متغیر X را تعداد مهرهٔ سفید، متغیر Y را تعداد مهرهٔ سیاه و متغیر Z را تعداد مهرهٔ آبی تعریف کنیم، $f_{X,Y,Z}(x,y,z)$ را تعیین کنید.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{3}{z}}{\binom{12}{3}}$$

$$D_f = \{(x,y,z) \mid x+y+z=3,\ x,y,z \in \{0,1,2,3\}\}$$

www.ethar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} k(x+y) & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

باشند:

الف) مقدار ثابت k را تعیین کنید.

ب) اگر $A=\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{1}{2},\ 0\le y\le \frac{1}{2}\}$ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^1\int_0^1 k(x+y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow k=1$$

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$P(A)=\iint f(x,y)\,dA=\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}(x+y)\,dx\,dy$$

Subject:
Year: Month: Day:

می‌دانیم متغیر X به تنهایی دارای تابع احتمال $f_X(x)$ است و به همین ترتیب Y. از طرفی اگر X و Y به طور همزمان اشکال وقوع داشته باشند، آنگاه دارای تابع احتمال توأم $f(x,y)$ می‌باشند.

اگر تابع $f_{X,Y}(x,y)$ در اختیار باشد، آیا می‌توان $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کرد؟

اگر $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ در اختیار باشد، آیا می‌توان $f_{X,Y}(x,y)$ را تعیین نمود؟

توزیع کناره‌ای (حاشیه‌ای)

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، آنگاه توزیع کناره‌ای X و Y را به تنهایی توزیع کناره‌ای گویند و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f_X(x)=\begin{cases} \sum_y f_{X,Y}(x,y) & \text{(گسسته)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy & \text{(پیوسته)} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \sum f_{X,Y}(x,y) & \text{(گسسته)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx & \text{(پیوسته)} \end{cases}$$

www.tanar.ir
www.jozve.org

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم به صورت جدول زیر باشند،

توزیع کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کنید.

$y \backslash x$	۰	۱	۲
۱	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
۲	$\frac{2}{10}$	۰	$\frac{3}{10}$

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{2} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,1) + f_{X,Y}(x,2)$$

$$f_X(x) = f(x,1) + f(x,2)$$

$x=0 \rightarrow f_X(0) = f(0,1) + f(0,2) =$ مجموع ستون اول جدول $= \frac{3}{10}$

$x=1 \rightarrow f_X(1) = f(1,1) + f(1,2) =$ مجموع ستون دوم $= \frac{1}{10}$

$x=2 \rightarrow f_X(2) = f(2,1) + f(2,2) =$ مجموع ستون سوم $= \frac{6}{10}$

با اضافه کردن یک سطر و یک ستون به جدول اصلی $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را میتوان بدست آورد.

$y \backslash x$	۰	۱	۲	$f_Y(y)$
۱	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
۲	$\frac{2}{10}$	۰	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
$f_X(x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، توزیع کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین کنید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در بقیهٔ نقاط} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در بقیهٔ جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = xy + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در بقیهٔ جاها} \end{cases}$$

www.ttnar.ir
www.jozve.org

www.ttnar.ir

www.jozve.org

تمرین ۱: اگر X و Y با تابع احتمال زیر تعریف شوند، اولاً مقدار k را تعیین کنید. ثانیاً توزیع‌های کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعریف کنید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_0^2 k(x+y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

استقلال دو متغیر تصادفی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ و توزیع‌های کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند.

دو متغیر X و Y را مستقل آماری گویند اگر و تنها اگر:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall (x,y)$$

$$X : x \longrightarrow A \qquad P(A) = P(X=x) = f_X(x)$$

$$Y : y \longrightarrow B \qquad P(B) = P(Y=y) = f_Y(y)$$

$$P(A \cap B) = P(X=x, Y=y) = f_{X,Y}(x,y)$$

A و B مستقل اند اگر $\longrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

بین X و Y مستقل اند اگر $\longrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall (x,y)$

یعنی X و Y هیچ تأثیری بر هم ندارند.

مثال ۱: اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام جدول زیر باشند، بررسی کنید که X و Y مستقل اند یا وابسته.

$y \backslash x$	۱	۲	۳	$f_X(x)$
۰	$\frac{1}{10}$	۰	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
۱	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
$f_Y(y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	

ابتدا توزیع‌های کناره‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را تعیین می‌کنیم.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall (x,y)$$

$$f(1,0) \overset{?}{=} f_X(1)\, f_Y(0) \Rightarrow \frac{1}{10} \neq \frac{4}{10} \times \frac{3}{10}$$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال زیر باشند، بررسی کنید که X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & 0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dy = \frac{1}{4}x \times 2 = \frac{1}{2}x \qquad 0 \le x \le 2$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dx = \frac{1}{2}(1+3y^2) \qquad 0 \le y \le 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+3y^2) & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) \overset{?}{=} f_X(x)\,f_Y(y)$$

$$\xrightarrow{?} \quad = \frac{1}{2}x \times \frac{1}{2}(1+3y^2)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & 0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

X و Y مستقل اند.

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2} \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x)\,f_Y(y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}) & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases} = \begin{cases} xy + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4} \\ 0 \end{cases}$$

X و Y مستقل نبوده و وابسته اند.

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

تابع احتمال شرطی:

$$P(Y=y \mid X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = f_{Y|X}(y|x)$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و توزیع کناری $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند، آنگاه تابع احتمال شرطی Y به شرط $X=x$ اتفاق افتاده باشد با علامت $f_{Y|X}(y|x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x) > 0$$

تابع احتمال شرطی تابعی از y است.

نکته: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)$

حال اگر X و Y مستقل باشند، داریم:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال زیر باشند،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & x=0,1 \text{ و } y=0,1,2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

الف / مقدار ثابت k را تعیین کنید.

ب / تابع احتمال شرطی $f_{Y|X=0}(y|0)$ و $f_{Y|X=1}(y|1)$ را تعیین کنید.

ج / بررسی کنید که X و Y مستقل اند یا وابسته.

$y \backslash x$	0	1	
0	$0 \to 0$	$k \to k$	$9k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{9}$
1	$k \to k$	$2k \to 2k$	یا
2	$2k \to 2k$	$3k \to 3k$	$\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{1} k f_{X,Y}(x,y)=1 \Rightarrow k=\frac{1}{9}$

$y \backslash x$	0	1	$f_X(x)$
0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$
$f_Y(y)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	

www.ithar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم زیر باشند، تابع احتمال شرطی $f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y|\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases} \qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$$

$$f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y|\tfrac{1}{2})=\frac{f_{X,Y}(\frac{1}{2},y)}{f_X(\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{2}+y}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \qquad 0\le y\le 1$$

Subject:
Year: Month: Day:

1) $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{Y|X=0}(y|0)=\dfrac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)}=3f_{X,Y}(0,y)$

2) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$f_{Y|0}(y|0)=3f_{X,Y}(0,y) \qquad y=0,1,2$

y	0	1	2
$f_{Y\|X=0}(y\|0)$	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$

$f_{Y|X=1}(y|1)=\dfrac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}=\dfrac{9}{9}f_{X,Y}(1,y)$

$f_{Y|1}(y|1)=\frac{3}{2}f_{X,Y}(1,y) \qquad y=0,1,2$

y	0	1	2
$f_{Y\|1}(y\|1)$			

www.ttnar.ir
www.jozve.org

www.mathnab.ir

تعیین تابع احتمال برای تابعی از یک متغیر تصادفی (احتمال یک متغیر تصادفی)

مسئله: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال معلوم $f_X(x)$ است. می‌خواهیم تابع احتمال متغیر تصادفی Y را تعیین کنیم ($f_Y(y)=?$) که در آن Y تابعی از X است. به عبارت دیگر:

$$Y=g(X)$$

مثلاً $Y=5X+1$ ، $Y=X^2$ ، $Y=e^X$ و ...

مثال‌های زیر نمونه‌ای از این گونه مسائل را در حالت کلی ساده گسسته نشان می‌دهند.

مثال ۱: متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده عدد روی یک تاس می‌باشد، دارای تابع احتمال زیر است:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

تابع احتمال متغیر تصادفی Y که $Y=X^2$ است را تعریف کنید. ($f_Y(y)=?$)

y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶
$f_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$x=1 \rightarrow y=1$

$x=2 \rightarrow y=4$

$\vdots$

$x=6 \rightarrow y=36$

در حالت گسسته: $f_Y(y)=P(Y=y)$

$f_Y(1)=P(Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{6}$

$f_Y(4)=P(Y=4)=P(X=2)=\frac{1}{6}$

$\vdots$

$f_Y(36)=P(Y=36)=P(X=6)=\frac{1}{6}$

در واقع این مثل مثال قبل می‌باشد که یک تاس معمولی با اعداد ۱ تا ۶، نماینده تمام تاس‌های دو وجهی با هر پارامترهای که روی وجوه آن نوشته شده باشد، است.

مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

تابع احتمال متغیر $Y=X^2$ را تعیین کنید.

Y تابعی غیر یک به یک از X است.

www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$Y = X^2$

$$\begin{cases} x = -2 \longrightarrow y = 4 \\ x = 2 \longrightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \longrightarrow y = 1 \\ x = 1 \longrightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$x = 0 \longrightarrow y = 0$$

$$x = 3 \longrightarrow y = 9$$

y	0	1	4	9
$f(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_Y(0) = f(Y=0) = P(X=0) = \frac{2}{8}$$

$$f_Y(1) = P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = f_X(-1) + f_X(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$f_Y(4) = P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2) = f_X(2) + f_X(-2) = \frac{3}{8}$$

$$f_Y(9) = P(Y=9) = P(X=3) = f_X(3) = \frac{1}{8}$$

Subject:
Year: Month: Day:

قضیه: در حالت خاصی را نشان می‌دهد که $Y = aX + b$ یا Y یک تابع خطی از X باشد

(تابع Y یک تابع یک به یک است.)

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد (X گسسته یا پیوسته)، آنگاه

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = aX + b$ که در آن a و b دو مقدار ثابت اند (یا Y یک تابع

خطی) برابر است با:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{در حالت گسسته} \\ \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}$$

اثبات: حالت اول: فرض کنید X گسسته است.

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(aX+b=y) = P\left(\frac{y-b}{a} = X\right)$$

$$= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad ☑$$

حالت دوم: فرض کنید X پیوسته باشد.

تابع توزیع تجمعی

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX+b \le y) = P(aX \le y-b)$$

www.tnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$f_Y(y) \begin{cases} a>0 & P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ a<0 & P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases}$$

نکته: $P(X>\alpha) + P(X \le \alpha) = 1$

$$f'_Y(y) = \begin{cases} a>0 & \frac{1}{a} f'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ a<0 & \frac{-1}{a} f'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ \frac{-1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

قضیه: زیر حالتی را نشان می‌دهد که $Y = g(X)$ و $g(X)$ یک تابع یک به یک از X است.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی (گسسته یا پیوسته) با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = g(X)$ که در آن $g(X)$ یک انتقال یک به یک است

Subject:
Year: Month: Day:

به گونه‌ای که: $y = g(x) \Leftrightarrow x = w(y)$

آنگاه $f_Y(y)$ برابر است با:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(w(y)) & \text{در حالت گسسته} \\ f_X(w(y))\,|J| & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}$$

که در آن $J = w'(y) = \frac{dx}{dy}$ و J را "ژاکوبین انتقال" می‌گویند.

در مثال قبل / $y = ax+b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a} = w(y)$

$$\left(w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a} \right)$$

اثبات: در حالت گسسته:

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = P(X = w(y)) = f_X(w(y))$$

در حالت پیوسته:

$$f_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

یک به یک: صعودی: جهت نامساوی حفظ می‌شود
نزولی: جهت نامساوی عوض می‌شود

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = 3X + 1$ را تعیین کنید. $(f_Y(y) = ?)$

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} = w(y) =$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-1}{3}-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-4}{3}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{y-4}{3}} \qquad y = 4, 7, 10, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \longrightarrow y = 4 \\ x = 2 \longrightarrow y = 7 \\ x = 3 \longrightarrow y = 10 \\ \vdots \end{array}\right\}$$

مثال / در مثال قبل تابع احتمال $Y = X^2$ را تعیین کنید.

$Y = X^2$ در دامنه $x = 1, 2, \ldots$ یک به یک است.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} = w(y)$$

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{y}-1} \qquad y = 1, 4, 9, \ldots$$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / در جعبه ۱ مهره با رنگ‌های سفید، سیاه و قرمز

رنگ	ظ ۱	ظ ۲	ظ ۳
سفید	۱	۳	۲
سیاه	۲	۱	۳
قرمز	۳	۲	۴

یکی از این سه ظرف را تصادفی انتخاب می‌کنیم
یک مهره از آن خارج می‌کنیم. احتمال اینکه
این ظرف، ظرف اول باشد

۱۴

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X تابع احتمال زیر را داراست:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید.

با توجه به رابطهٔ $Y = X^2$ تابع یک به یک است.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} = w(y)$$

$$J = w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = f_X(w(y))\,|J| = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اگر به جواب بدست آمده شک کردیم، باید ببینیم حاصل انتگرال آن یک میشود یا خیر.

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت $f_X(x) = \begin{cases} 2x e^{-x^2} & x \geq 0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$ است. تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید. ($f_Y(y) = ?$)

Subject:
Year: Month: Day:

با توجه به رابطهٔ $Y = X^2$ تابع یک به یک است.

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} = w(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = w'(y) = J = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(2\sqrt{y} \times e^{-y}\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

قضیهٔ زیر حالت خاصی را نشان می‌دهد که تابع $Y = g(X)$ یک به یک نیست.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ (Y یک به یک نیست چون مقادیر X منفی نیست) برابر است با:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\right)$$

اثبات:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$= P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

www.ithar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$= f_X(+\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})$$ مشتق

$$f'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f'_X(+\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f'_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right)$$

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=|X|$ (Y یک به یک نیست) برابر است با:

$$f_Y(y) = f_X(-y) + f_X(y)$$

اثبات:

$$f_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y)$$

$$f_Y(y) = P(-y \le x \le y) = f_X(y) - f_X(-y)$$

$$f'_Y(y) = f'_X(y) + f'_X(-y) \Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$$

قضیه زیر حالت کلی را نشان می‌دهد که $Y=g(X)$ غیر یک به یک است اما می‌توان آن را به k افراز یک به یک تقسیم نمود.

Subject:
Year: Month: Day:

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=g(X)$ که در آن $g(X)$ یک تابع غیر یک به یک است. بگونه‌ای که بتوان آن را به k افراز یک به یک نسبت به متغیر X تقسیم نمود بطوریکه

$$y = u_1(x_1) \Leftrightarrow x_1 = w_1(y)$$

$$y = u_2(x_2) \Leftrightarrow x_2 = w_2(y)$$

$$\vdots$$

$$y = u_k(x_k) \Leftrightarrow x_k = w_k(y)$$

آنگاه تابع احتمال $Y=g(X)$ برابر است با:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(w_i(y)) \, |j_i| \qquad j_i = \frac{dx_i}{dy} = w'_i(y)$$

تذکر: دو قضیه قبلی حالت خاصی از این قضیه اند. هنگامیکه k برابر ۱ باشد.

www.ethar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت جدول زیر است.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

$\sum_x f_X(x) = 1$. تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید. $(f_Y(y) = ?)$

واضح است که تابع $Y = X^2$ غیر یک به یک است (با توجه به دامنهٔ x. $(x = -3, \dots, 4)$)

$y = x^2$

$x = 3$ یا $-3 \longrightarrow y = 9$

$x = 2$ یا $-2 \longrightarrow y = 4$

$x = 1$ یا $-1 \longrightarrow y = 1$

$x = 0 \longrightarrow y = 0$

$x = 4 \longrightarrow y = 16$

y	0	1	4	9	16
$f_Y(y)$	$f_X(0)$	$f_X(-1) + f_X(1)$	$f_X(2) + f_X(-2)$	$f_X(3) + f_X(-3)$	$f_X(4)$

$f_Y(0) = P(Y = 0) = P(X = 0) = f_X(0)$

$f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X = -1) \overset{\text{یا}}{+} P(X = 1) = f_X(-1) + f_X(1)$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید.

$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ / با توجه به مقادیر X غیر یک به یک است.

$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{y} & -1 < x < 0 \\ x = +\sqrt{y} & 0 < x < 1 \\ x = +\sqrt{y} & 1 < x < 2 \end{cases} \quad -1 < x < 1 \Rightarrow 0 < y < 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\right) & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(0 + f_X(\sqrt{y})\right) & 1 < y < 4 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال بصورت زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} k & -2 < x < 6 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً مقدار ثابت k را تعیین کنید. ثانیاً تابع احتمال متغیر $Y = X^2$ را تعیین کنید.

Subject:
Year: Month: Day:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}\right) & 1 < y < 4 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1 < y < 4 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

www.ettnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال بصورت زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} kx(1-x) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً مقدار k را تعیین کنید. ثانیاً تابع احتمال $Y = X^2$ و $Y = 3X+1$ را بیابید.

Subject:
Year: Month: Day:

امید ریاضی expected value

برای هر متغیر تصادفی مانند X با تابع احتمال $f_X(x)$ عددی را تعریف می‌کنیم که به آن امید ریاضی می‌گویند و با تعریف زیر است:

امید ریاضی:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال معلوم $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی متغیر تصادفی که با علامت $E(X)$ نشان داده می‌شود را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x\, f_X(x) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

فرمول ۱

تذکر: امید ریاضی هر متغیر تصادفی، عددی ثابت و منحصر به فرد است.

تذکر ۲: امید ریاضی دارای واحد است و همان واحد متغیر تصادفی را دارا می‌باشد.

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتیکه متغیر تصادفی X نشان دهندهٔ عدد روی تاس باشد، امید ریاضی این متغیر را تعیین کنید.

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} x f_X(x) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \dots + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3.5$$

انتظار می‌رود که اگر یک تاس سالم که یک مرتبه پرتاب شود، عدد ۳.۵ مشاهده کنیم. یعنی در عمل اگر تاس سالم باشد و به طور مکرر پرتاب شود، انتظار می‌رود معدل عددهای مشاهده شده به ۳.۵ نزدیک شود.

مثال / متغیر تصادفی X که نشان دهندهٔ طول عمر یک نوع لامپ برحسب ساعت می‌باشد، دارای تابع احتمال بصورت زیر است. اولاً مقدار ثابت k را محاسبه کنید، ثانیاً $E(X)$ را حساب کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^3} & x \geq 100 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$\int_{100}^{+\infty} \frac{k}{x^3}\, dx = 1 \Rightarrow k = 20000$$

$$E(X) = \int_{100}^{+\infty} x \cdot \frac{\overset{20000}{k}}{x^3}\, dx = 200 \text{ ساعت}$$

Subject:
Year: Month: Day:

انتظار می‌رود که یک لامپ از این نوع ۲۰۰ ساعت دوام داشته باشد. در عمل، اگر تعدادی از این لامپ‌ها انتخاب و معدل طول عمر آنها محاسبه شود، انتظار می‌رود این عدد به ۲۰۰ نزدیک باشد.

مثال / متغیر X دارای تابع احتمال زیر است. امید ریاضی X را پیدا کنید.

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$\frac{1}{2}E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{2}E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1 \Rightarrow E(X) = 2$$

تذکر: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه امید ریاضی هر تابعی از X مانند $g(X)$ برابر است با:

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_x g(x) f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx \end{cases}$$

www.ethnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ است. مطلوبست محاسبه $E(X)$ و $E(X^2)$.

$$E(X^2)=E(g(X)) \rightarrow g(X)=X^2$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx \overset{?}{=} 1$$

یکبار جزء به جزء

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx \overset{?}{=} 2$$

دو بار جزء به جزء

تعریف: اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشند، آنگاه امید ریاضی هر تابع از X و Y مانند $g(X,Y)$ برابر است با:

$$E(g(X,Y))=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy & \text{پیوسته} \\ \sum_x \sum_y g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y) & \end{cases}$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\leq x,y\leq 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$ باشند، مطلوبست محاسبه $E(X)$، $E(Y)$ و $E(XY)$.

Subject:
Year: Month: Day:

$$\underbrace{E(X)}_{g(X,Y)=X}=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{12}$$

$$\underbrace{E(Y)}_{g(X,Y)=Y}=\int_0^1\int_0^1 y(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{12}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}$$

قوانین امید ریاضی:

۱- اگر $g(X)$ و $h(X)$ توابعی از متغیر تصادفی X باشند، آنگاه:

$$E(g(X)\pm h(X))=E(g(X))\pm E(h(X))$$

۲- اگر a و b دو عدد ثابت باشند، آنگاه:

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

نکته: اگر $a=0$ باشد $\rightarrow$ $E(b)=b$

نکته: اگر $b=0$ باشد $\rightarrow$ $E(aX)=aE(X)$

www.ittnar.ir
www.jozve.org

۳- اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

اثبات: با توجه به تعریف امید ریاضی داریم:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

چون X و Y مستقل اند پس $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ است. در نتیجه:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy = E(X)E(Y) \quad \boxtimes$$

۴- اگر $g(X,Y)$ و $h(X,Y)$ توابعی از متغیرهای تصادفی X و Y باشند، آنگاه:

$$E(g(X,Y) \pm h(X,Y)) = E(g(X,Y)) \pm E(h(X,Y))$$

معرفی چند امید ریاضی خاص:

در این قسمت به معرفی چند امید ریاضی خاص خواهیم پرداخت که در کاربرد مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۱- میانگین ۲- واریانس ۳- انحراف معیار ۴- کوواریانس ۵- ضریب همبستگی

میانگین:

اگر در فرمول ۱ تابع $g(X)$ را بصورت $g(X) = X$ تعریف کنیم، مقدار امید ریاضی این تابع، میانگین می‌گوییم و با علامت μ یا μ_X نشان داده و می‌نویسیم:

$$\text{میانگین} = \mu = \mu_X = E(X)$$

مثال ۱: برای متغیر X که نشان‌دهنده عدد روی تاس می‌باشد، می‌دانیم $E(X) = 3.5$ است. به عبارت دیگر

$$\text{میانگین} = \mu = 3.5$$

تذکر: میانگین مشخص‌کننده محل تمرکز مشاهدات یک متغیر تصادفی است. (یک جامعه آماری)

تذکر: میانگین می‌تواند همه مقادیر را اختیار کند $\mu = 0$ ، $\mu < 0$ ، $\mu > 0$ و ...

www.ithar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

واریانس

اگر در فرمول ۱ تابع $g(x)$ را بصورت $g(x)=(x-\mu_x)^2$ اختیار کنیم، آنگاه امید ریاضی این تابع را با علامت σ^2 یا σ_x^2 یا $Var(X)$ نشان داده و آنرا واریانس متغیر X می‌نامیم

به عبارت دیگر واریانس عبارتست از:

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu_x)^2$$ ، واریانس

تذکر: واریانس مشخص کننده میزان پراکندگی مشاهدات یک متغیر نسبت به میانگین است.

قضیه ـ فرمول محاسباتی واریانس:

واریانس متغیر تصادفی X برابر است با:

$$\sigma^2 = E(X^2)-\mu^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2)-(E(X))^2$$

اثبات:

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2-2\mu X+\mu^2) = E(X^2)-\underbrace{2\mu E(X)}_{-2\mu^2}+\mu^2$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$\sigma^2 = E(X^2)-\mu^2$$

نکته: $E(X^2) \geq (E(X))^2$

انحراف معیار:

جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌گوییم و با علامت σ یا σ_x نشان می‌دهیم.

نکته: یک متغیر تصادفی مانند X حداقل سه عدد مهم دارد: μ، σ و σ^2.

مثال / متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ است. مطلوبست محاسبه μ، σ و σ^2 برای این متغیر.

$E(X)=1$ ، $E(X^2)=2$

$\mu=1$ $\quad \sigma^2 = E(X^2)-\mu^2 = 2-1 = 1 \Rightarrow \sigma^2=1 \Rightarrow \sigma=1$

کوواریانس

اگر در فرمول شماره ۲ تابع $g(x,y)$ را بصورت زیر تعریف کنیم،

www.ttnar.ir
www.jozve.org

$$g(X,Y) = (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$$

آن گاه امید ریاضی این تابع را کوواریانس گوییم و با علامت σ_{XY} یا $Cov(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

قضیه: فرمول محاسباتی کوواریانس:

کوواریانس دو متغیر X و Y برابر است با

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

نتیجه: اگر X و Y مستقل باشند، $\sigma_{XY}=0$ است. عکس این مطلب درست نیست چون ممکن است در عین صفر بودن σ_{XY}، X و Y وابسته باشند.

نتیجه ۲: اگر $\sigma_{XY}\neq 0$ باشد، X و Y وابسته‌اند.

ضریب همبستگی:

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، ضریب همبستگی این دو متغیر با علامت ρ یا $\rho(X,Y)$ نشان می‌دهند و برابر است با:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\text{کوواریانس}}{\text{(انحراف معیار X)(انحراف معیار Y)}}$$

σ_{XY}: >0 ، <0 ، $=0$

ρ: >0 ، <0 ، $=0$

قضیه: اگر ρ ضریب همبستگی دو متغیر X و Y باشد، آن گاه:

$$-1 \le \rho \le +1 \quad \text{یا} \quad \rho^2 \le 1$$

تذکر: اگر $\rho \to 1$ یا $\rho \to -1$، اولاً X و Y وابسته‌اند. ثانیاً X و Y وابستگی شدید خطی دارند. به عبارت دیگر: $X = cY + d$ یا $Y = aX + b$

نتیجه: اگر $\rho = 0$، ۱) X و Y مستقل‌اند ($\sigma_{XY}=0 \Leftarrow$ X و Y مستقل)

یا

۲) X و Y وابسته‌اند اما فاقد وابستگی خطی هستند.

www.ethar.ir
www.jozve.org

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشد:

$y \backslash x$	-1	0	1	$f_Y(y)$
-1	0	$1/4$	0	$\frac{1}{4}$
0	$1/4$	0	$1/4$	$\frac{1}{2}$
1	0	$1/4$	0	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

الف / ρ این متغیر را تعیین کنید

ب / بررسی کنید X و Y مستقل اند یا وابسته

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$\mu_X = \mu_Y = -1(1/4) + 0(1/2) + 1(1/4) = 0$$

$$E(XY) = \sum_{y=-1}^{1} \sum_{x=-1}^{1} xy\, f_{X,Y}(x,y) = 0$$

$$\sigma_{XY} = 0 - 0 = 0 \longrightarrow \rho = \frac{0}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 0$$

برای تعیین وابستگی یا استقلال چند متغیر از تعریف استفاده می‌کنیم.

$$\forall x,y : f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

بررسی : $f(-1,1) \overset{?}{=} f_X(-1) f_Y(1)$

$$0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \longrightarrow$$ X و Y وابسته اند

مثال / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x,y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد:

اولاً ρ را تعیین کنید. ثانیاً مشخص کنید X و Y مستقل اند یا وابسته.

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x(x+y)\,dx\,dy = \frac{7}{12} = \mu_Y$$

$$E(XY) = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{-1}{144}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{5}{144}$$

$$\rho = \frac{\frac{-1}{144}}{\sqrt{\frac{5}{144}} \times \sqrt{\frac{5}{144}}} = 0$$

$$\sigma \neq 0 \longrightarrow$$ X و Y وابسته

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

چند خواص امید ریاضی و واریانس

چند قضیه زیر خواص واریانس را نشان می‌دهد. این خواص به کمک نرمال‌ها در ۲ بخش اثبات می‌گردند

قضیه ۱:

اگر a و b دو متغیر ثابت باشند، آنگاه نتایج زیر برقرار است:

1) $\sigma^2_{x+b} = \sigma^2_x = \sigma^2$

2) $\sigma^2_{ax} = a^2\sigma^2_x$

3) $\sigma^2_{ax\pm by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y \pm 2ab\,\sigma_{xy}$

4) $Cov(ax+b, cy+d) = ac\,Cov(x,y)$

اثبات ۱:

$\sigma^2_{x+b} = E(x+b-\mu_{x+b})^2$

در فرمول ۲ به جای $g(x)$ قرار می‌دهیم: $x+b$

$\mu_{x+b} = E(x+b) = \mu_x + b$

SAMAN

Subject:
Year: Month: Day:

$\sigma^2_{x+b} = E(x+b-\mu_x-b)^2 = E(X-\mu_x)^2 = \sigma^2_x$

نتیجه: اگر به مشاهدات یک متغیر عددی را اضافه کنیم، آن عدد به میانگین اضافه می‌شود و واریانس تغییر نمی‌کند.

اثبات ۲: یعنی اگر مشاهدات یک متغیر را در عددی مثل a ضرب کنیم، میانگین a برابر و واریانس a^2 برابر خواهد شد. (اثبات به عهده شما)

$\mu_{ax\pm by} = E(ax\pm by) = a\mu \pm b\mu_y$

$\sigma^2_{ax\pm by} = E(ax\pm by) = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y \pm ab\,\sigma_{xy}$

اگر x و y مستقل باشند:

$\sigma^2_{ax\pm by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y$

SAMAN

www.ithar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

امید ریاضی شرطی (مشروط)

امید ریاضی متغیر Y به شرط آنکه X=x اتفاق افتاده باشد را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu^* = E(Y|X) = \begin{cases} \sum_y y\, f_{Y|X}(y|x) \\ \int y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy \end{cases}$$

به طور مشابه واریانس مشروط بصورت زیر تعریف میگردد:

واریانس مشروط متغیر تصادفی Y به شرط آنکه X=x اتفاق افتاده باشد برابر است با

$$V(Y|X) = E((Y-\mu^*)^2 | X=x) = \begin{cases} \sum_y (y-\mu^*)^2 f_{Y|X}(y|x) \\ \int (y-\mu^*)^2 f_{Y|X}(y|x)\, dy \end{cases}$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین‌های به ترتیب $\mu_X=2$ و $\mu_Y=3$ و واریانس‌های $\sigma_Y^2=2$ و $\sigma_X^2=1$ باشد، میانگین و واریانس متغیر تصادفی Z بصورت $Z=3X+2Y-7$ را محاسبه کنید.

AMANE

Subject:
Year: Month: Day:

$$\mu_Z = E(Z) = E(3X+2Y-7)$$
$$= 3E(X)+2E(Y)-7$$
$$= 3\mu_X+2\mu_Y-7$$
$$= 3(2)+2(3)-7 = 5 \Rightarrow \mu_Z = 5$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma^2_{\underbrace{3X+2Y-7}_{W \text{ متغیر}}} = \sigma^2_{3X+2Y} = 9\sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2 = 9(1)+4(2) = 17$$

مثال / اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشد،

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

اولاً بررسی کنید که f یک تابع احتمال توأم است. $\left(\int_0^1\int_0^x 8xy\, dy\, dx\right)$

ثانیاً مطلوبست $\mu^* = E(Y|X)$ و $V(Y|X)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^x 8xy\, dy = \begin{cases} 4x^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy}{4x^2} = \frac{2y}{x} \qquad 0\le x\le 1$$

$$\mu^* = \int_0^x y \cdot \frac{2y}{x}\, dy = \frac{2x^2}{3} \qquad 0<x\le 1$$

AMANE

www.ttnar.ir
www.ijozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$V(Y|X) = \int_0^x \left(y - \frac{2x^2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2y}{x}\, dy \overset{?}{=} \frac{x^2}{18}$$

تمرین / اگر X و Y دو متغیر با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x,y<1 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$

باشد، مطلوبست محاسبه $E(Y|X)$ ، $E(X|Y)$ ، $V(X|Y)$ و

$V(Y|X)$.

۲۵/

SAMAN

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین ۲: اگر در مسئله قبل تابع احتمال بصورت $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} \cdot e^{-y}}{y} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$

باشد، مطلوبست همان مطلوبات تمرین قبل.

SAMAN

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

تابع مولد گشتاور

با توجه به اینکه محاسبهٔ میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی اهمیت زیادی در کاربرد دارد، لازم است که این دو مقدار همواره محاسبه شوند. اما محاسبهٔ انبوه در بسیاری از موارد با استفاده از تعریف، کار ساده‌ای نمی‌باشد. در چنین مواردی می‌توان از گشتاورها و تابع مولد گشتاور برای محاسبهٔ آن‌ها استفاده کرد.

تعریف گشتاور مرتبهٔ r ام:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه به مقدار $E(X^r)$ که با علامت μ'_r نشان داده می‌شود، گشتاور مرتبهٔ r ام پیرامون مبدأ (صفر) می‌گویند.

$$\mu'_r = E(X^r)$$

تذکر: گشتاور مرتبهٔ r ام نوعی امید ریاضی خاص است اگر $g(x) = x^r$ فرض کنیم که r عددی طبیعی است.

Subject:
Year: Month: Day:

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع مولد گشتاور این متغیر که با علامت تابعی $M_X(t)$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \rightarrow \text{حاصل تابعی از } t \text{ است}$$

* t یک عدد دلخواه می‌باشد.

$$M'(t) = \frac{dM}{dt} = \begin{cases} \sum_x x e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M'(0) = E(X)$$

$$M''(t) = \frac{d^2M}{dt^2} = \begin{cases} \sum_x x^2 e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M'(0) = E(X^2)$$

$$\vdots$$

$$M^{(r)}(t) = \frac{d^rM}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow M^r(t) = E(X^r)$$

www.ttnar.ir
www.ijozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$\mu_1' = \mu_1 = E(X)$ ، $M'(0) = \left.\frac{dM}{dt}\right|_{t=0}$

$\mu_2' = E(X^2)$ → $\sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2$

مثال / اگر X متغیری با تابع احتمال $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ باشد، میانگین، واریانس و انحراف معیار متغیر X را به دو طریق تعیین کنید. ۱- استفاده از تعریف ۲- استفاده از تابع مولد گشتاور

$$E(X^1) = \int_0^{+\infty} x^1 e^{-x} dx = 1$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 1 \longrightarrow \sigma = 1$$

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{(t-1)x} dx$$

$$= \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x} \Big|_0^{+\infty} \quad t < 1$$

$$M(t) = \frac{1}{1-t} \quad t < 1$$ تابع مولد گشتاور

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال / تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X بصورت زیر است.

$$M(t) = e^{(2t + \frac{1}{2}t^2)}$$

مطلوبست محاسبهٔ میانگین، واریانس و انحراف معیار این متغیر.

$$\mu = M'(0) \qquad \sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2$$

$$M'(t) = (2+t)\, e^{(2t + \frac{1}{2}t^2)} \Rightarrow \mu = M'(0) = E(X) = 2 \Rightarrow \mu = 2$$

$$M''(t) = e^{2t + \frac{1}{2}t^2} + (2+t)^2 e^{(2t + \frac{1}{2}t^2)}$$

$$M''(0) = E(X^2) = 1 + 4 = 5$$

$$\sigma^2 = 5 - (2)^2 = 1 \Rightarrow \sigma^2 = 1 \Rightarrow \sigma = 1$$

قضایای دیگری از تابع مولد گشتاور:

۱) اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ ، $M_Y(t)$ باشند، آنگاه X و Y دارای توزیع یکسان (هم توزیع) می‌باشند اگر و تنها اگر:

$$M_X(t) = M_Y(t)$$

مثال: $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

SAMAND

www.ettar.ir
www.jozve.org

۲) اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشند،

آن‌گاه تابع مولد گشتاور $Z = X+Y$ برابر است با:

$$M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

تعمیم: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل باشند، آن‌گاه:

$$M_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

اگر $X_1, \dots, X_n$ هم‌توزیع و مستقل باشند، آن‌گاه:

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t) = \left(M_X(t)\right)^n$$

تمرین: تابع مولد گشتاور متغیر X به صورت زیر است.

$$M(t) = \frac{1}{10} e^{t} + \frac{2}{10} e^{2t} + \frac{2}{10} e^{3t} + \frac{3}{10} e^{4t} + \frac{2}{10} e^{5t}$$

الف: مطلوبست محاسبه μ، σ^2 و σ.

ب: مطلوبست محاسبه تابع احتمال X.

www.ettnan.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

معرفی چند تابع احتمال کاربردی

در این قسمت به معرفی چند تابع احتمال گسسته و پیوسته می‌پردازیم که در کاربرد بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. این توزیعات عبارتند از: توزیع یکنواخت، برنولی، دوجمله‌ای، فوق هندسی، دوجمله‌ای منفی و پواسن.

توزیع گاما، نرمال (گوسی)، کای دو، توزیع t، توزیع f (فیشر)

توزیع یکنواخت

اگر متغیر تصادفی X، n مقدار $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با احتمال مساوی اختیار کند، توزیع این متغیر را توزیع یکنواخت گویند و با علامت تابعی $f(x;n)$ نشان می‌دهیم.

$$f(x) = f(x;n) = \frac{1}{n}$$

تذکر: به آزمایش تصادفی که متغیر آن دارای توزیع یکنواخت باشد، آزمایش یکنواخت می‌گویند.

بنابراین نام آزمایش، نام متغیر و نام تابع احتمال یک‌سان تلقی می‌شود.

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: پرتاب یک سکه سالم به تعداد ۱ مرتبه، یک آزمایش یکنواخت است که توزیع آن هم یکنواخت می‌باشد.

$$f(x,1) = \frac{1}{2} \quad x = 0, 1$$

مثال: پرتاب یک تاس سالم یک آزمایش یکنواخت است.

$$f(x,6) = \frac{1}{6} \quad x = 1, 2, \dots, 6$$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع یکنواخت $f(x) = \frac{1}{n}$ $(x = x_1, \dots, x_n)$ برابر است با:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}$$

اثبات: $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = x_1 \times \frac{1}{n} + x_2 \left(\frac{1}{n}\right) + \dots + x_n \left(\frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

توزیع برنولی:

آزمایش برنولی: اگر نتیجه یک آزمایش تصادفی به دو صورت موفقیت و شکست طبقه‌بندی گردد، یک آزمایش برنولی می‌گویند. (آزمایش کلی دو حالته)

آزمایش $\to$ S ، F

www.ktpar.ir
www.jozve.org

مثال: پرتاب یک سکه، روشن کردن کلید برق.

متغیر برنولی:

متغیر تصادفی X که نماینده تعداد موفقیت‌ها در آزمایش برنولی باشد را متغیر برنولی می‌گویند.

$X: x = 0, 1$

شکست، موفقیت

$P(S) = P(X=1) = p \quad (0<p<1)$

$P(f) = P(X=0) = 1-p = q$

توزیع برنولی:

توزیع متغیر برنولی را توزیع برنولی نامیده و با علامت خاص $b(x;p)$ نشان می‌دهند.

x	0	1
$f_X(x) = b(x;p)$	q	p

$f_X(x) = b(x;p) = p^x q^{1-x} \quad x=0,1$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع برنولی $b(x;p)$ برابر است با:

$\mu = p \qquad \sigma^2 = pq$

اثبات:

الف: با کمک تعریف:

$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = 0 \times q + 1 \times p = p$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p$

$\sigma^2 = E(X^2) - (\mu)^2 = p^2 - p = p(1-p) = pq$

ب: با کمک تابع مولد گشتاور:

$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} f_X(x) = f(0) + e^t f(1)$

$= q + pe^t$

$M'(t) =$

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

توزیع دو جمله‌ای (binomial distribution)

آزمایش دو جمله‌ای:

اگر یک آزمایش برنولی با n مرتبه و مستقل تکرار کنیم، این آزمایش را دو جمله‌ای می‌گویند.

مثال: پرتاب یک سکه (سالم یا ناسالم) n مرتبه، روشن کردن n کلید برق، خارج کردن n مهره با جایگذاری از خانه‌ی حاوی a مهره سفید و b مهره سیاه.

متغیر دو جمله‌ای:

متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده تعداد موفقیت در آزمایش دو جمله‌ای می‌باشد را متغیر دو جمله‌ای می‌گویند.

$$X: x = 0, 1, 2, \dots, n$$

تابع یا توزیع دو جمله‌ای:

توزیع متغیر دو جمله‌ای را توزیع دو جمله‌ای گویند و با علامت $f_X(x) = b(x; n, p)$ نشان می‌دهند.

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$n = 1 \Rightarrow f_X(x) = b(x; 1, p) = b(x; p)$$

۲۴

AMANE

Subject:
Year: Month: Day:

تمرین: تحقیق کنید این تابع یک تابع احتمال است.

$$f_X(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$\sum_{x=0}^{n} f_X(x) \overset{?}{=} 1 \iff \sum_{x=0}^{n} b(x; n, p) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \overset{?}{=} 1$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} \qquad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\begin{cases} r = x \\ a = p \\ b = q \end{cases} \Rightarrow (p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع دو جمله‌ای $b(x; n, p)$ برابر است با

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq$$

اثبات به کمک تابع مولد گشتاور:

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}$$

متناظر با بسط دو جمله‌ای

AMANE

www.ethar.ir

www.jozve.org