$$M(t) = (pe^t + q)^n$$

$$M'(t) = npe^t(pe^t + q)^{n-1}$$

$$\mu = M'(0) = np$$

$$M''(t) = npe^t(pe^t + q)^{n-1} + (npe^t)^2(pe^t + q)^{n-1}$$

$$\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 =$$

مثال زیر جایگزینی از مقادیر از توزیع تجمعی دوجمله‌ای را که برای n های مختلف $n = 1, 2, \ldots, 25$ و p های مختلف $(p = 0.1, \ldots, 0.9)$ نوشته شده است را نشان می‌دهد.

مثال: از ظرفی که ۸ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه دارد، ۲۰ مهره را به تصادف، به طور متناوب و با جایگذاری برمی‌داریم. مطلوبست محاسبهٔ احتمال‌های زیر:

الف: دقیقاً ۱۸ مهره سفید باشد.

ب: حداقل ۱۵ مهره سفید باشد.

ج: حداکثر ۱۶ مهره سفید باشد.

د: از ۱۰ تا ۱۸ مهره سفید باشد (با در نظر گرفتن خود ۱۰ و ۱۸)

این آزمایش، دوجمله‌ای است. اگر X را تعداد مهرهٔ سفید تعریف کنیم،

$$b(x; \underset{n}{20}, \underset{p}{0.8})$$

$$f_X(x) = \binom{20}{x}(0.8)^x(0.2)^{20-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, 20$$

الف: $P(X=18) = f_X(18) = \binom{20}{18}(0.8)^{18}(0.2)^2 =$ که بدیهی است

$$P(X=18) = \sum_{x=0}^{18} b(x; 20, 0.8) - \sum_{x=0}^{17} b(x; 20, 0.8)$$

$$= f_X(18) - f_X(17) = 0.9308 - 0.7980$$

ب: $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - f_X(14) = 1 - 0.1958$

ج: $P(X < 16) = f(16) = 0.5886$

د: $P(10 \leq X \leq 18) = f(18) - f(9) = 0.8308 - 0.0006$

www.ithar.ir
www.iozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$F(x) = \sum_{x=0}^{x} b(x; n, p)$$

n	r	p	
⋮	⋮		
20	0		X
⋮	⋮		
	20		

توزیع فوق هندسی

اگر آزمایش فوق هندسی: یک آزمایش تصادفی که دارای ۲ دو نتیجه زیر باشد، آزمایش فوق هندسی می‌گویند.

۱- یک نمونه تصادفی n تایی بدون جایگذاری از n کالا انتخاب شود.

۲- از N کالای موجود، k کالا موفقیت و $N-k$ کالا شکست تلقی شود.

مثال: از ظرفی که ۸ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه دارد، سه مهره را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. یا، خرید یک دستگاه تلویزیون از فروشگاهی که ۱۰ دستگاه تلویزیون سالم و

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

۴ دستگاه تلویزیون خراب دارد.

متغیر تصادفی فوق هندسی: متغیر تصادفی X که نشان‌دهندهٔ تعداد موفقیت در آزمایش فوق هندسی باشد را متغیر فوق هندسی می‌گویند.

توزیع احتمال فوق هندسی: توزیع متغیر فوق هندسی را توزیع فوق هندسی گویند و این تابع احتمال به صورت زیر است:

$$f_X(x) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

قضیه: میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی برابر است با:

$$\mu = n \cdot \frac{k}{N} \qquad \sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n \cdot \frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

نتیجه: اگر N به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و n کوچک باشد،

$$\frac{k}{N} = p \qquad 0 < p < 1$$

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq$$

SAMAND

www.tunar.ir

www.jozve.org

اگر تعداد کالا زیاد و تعداد نمونه کم باشد، نمونه‌گیری بدون جایگذاری با نمونه‌گیری با جایگذاری برابر است. در کاربرد همواره نمونه‌گیری بدون جایگذاری است و با توجه به زیاد بودن کالا از توزیع دوجمله‌ای استفاده می‌کنند.

توزیع دوجمله‌ای منفی

آزمایش دوجمله‌ای منفی: اگر یک آزمایش برنولی را آنقدر ادامه دهیم تا r موفقیت رخ دهد و سپس آزمایش را قطع کنیم، چنین آزمایشی را دوجمله‌ای منفی می‌گویند.

مثال: یک تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا سومین (r امین) عدد 6 مشاهده شود.

متغیر تصادفی در دوجمله‌ای منفی: متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده تعداد آزمایش تا رسیدن به r امین موفقیت را متغیر دوجمله‌ای منفی می‌گویند.

توزیع این متغیر را توزیع دوجمله‌ای منفی نامیده و با علامت زیر نشان می‌دهند و فرمول آن به قرار زیر است:

$$f_X(x) = b^*(x; r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

تعداد آزمایش: X $\quad x = r, r+1, \ldots$

میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای منفی برابر است با:

$$\mu = \frac{r}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{rq}{p^2}$$

اثبات به کمک تابع مولد گشتاور: ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه می‌کنیم:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

$$= p^r e^{tr} (1 - qe^t)^{-r} \qquad r < e^{-q}$$

حالت خاص:

اگر $r = 1$ باشد، یعنی آزمایش را آنقدر ادامه دهیم تا اولین موفقیت به دست آید، سپس آزمایش را قطع می‌کنیم. این آزمایش را آزمایش هندسی می‌گوییم.

$$b^*(x; 1, p) = g(x, p) = pq^{x-1} \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

مثال: تاسی را متوالیاً پرتاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال آنکه سومین عدد 6 در دهمین پرتاب نتیجه شود.

$r = 3 \quad p = 1/6$

$X = \text{تعداد آزمایش} = 10$

$$\Rightarrow b^*(10; 3, \tfrac{1}{6}) = \binom{10-1}{3-1} \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10-3}$$

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

توزیع پواسن:

آزمایش پواسن: اگر نتیجهٔ یک آزمایش تصادفی در یک فاصلهٔ زمانی یا ناحیه‌ای معین رخ دهد، چنین آزمایشی را پواسن گویند. (فاصلهٔ زمانی: ... ، ثانیه، دقیقه، ساعت، روز، ...) (ناحیه: طول، سطح، حجم، ...)

مثال: تعداد تصادف در طول روز (ماه، سال و ...) در یک شهر. یا تعداد درخواستی که تلفن بعدا در می‌آید. یا تعداد اشتباهاتی که یک تایپیست در یک صفحه مرتکب می‌شود.

در تمام آزمایش‌های پواسن λ: متوسط تعداد موفقیت، مقداری معلوم است.

متغیر پواسن: متغیر تصادفی X که نشان‌دهندهٔ تعداد موفقیت در آزمایش پواسن باشد را متغیر پواسن می‌گویند.

$X: x = 0, 1, 2, \ldots$

توزیع پواسن: توزیع متغیر پواسن را توزیع پواسن می‌گویند و با علامت $f_X(x) = p(x, \lambda)$ نشان داده و فرمول آن بصورت

$$f_X(x) = P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

مقابل است.

SAMANE

Subject:
Year: Month: Day:

قضیه: میانگین و واریانس توزیع پواسن برابر است با:

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma = \lambda$$

اثبات: (به کمک تابع مولد گشتاور)

قبل از اثبات می‌خواهیم ببینیم که فرمول پواسن آیا تابع احتمال هست یا خیر.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!} \overset{?}{=} 1$$

$$e^{-\lambda}\cdot\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}}_{e^{\lambda}} \qquad \left(e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\right) \text{ بسط مک لورن}$$

$$e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1 \ \checkmark$$ تابع احتمال هست.

اثبات:

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}$$

$$e^{-\lambda}\cdot\underbrace{\sum\frac{(\lambda e^{t})^{x}}{x!}}_{e^{\lambda e^{t}}} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{t}}$$

$$M(t) = e^{\lambda(e^{t}-1)}$$ هر تابع احتمالی که تابع مولد گشتاورش به شکل مقابل باشد، مربوط به توزیع پواسن است.

SAMANE

www.ethnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$\mu = M'(0) = \lambda e^{t} \cdot e^{\lambda(e^{t}-1)} \xrightarrow{t=0} \boxed{\mu = \lambda}$$

قضیه: زیر نشان می‌دهد که توزیع پواسن حالت خاصی از توزیع دو جمله‌ای است. همانطور که

$$n \to \infty \ , \ p \to 0 \ (\text{یا } p \to 1)$$
$$q \to 1 \quad q \to 0$$

قضیه - تقریب دو جمله‌ای به کمک پواسن

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با توزیع $b(x,n,p)$ باشد، آنگاه شکل حدی توزیع

این متغیر هنگامی که $n \to +\infty$ و $p \to 1$ یک توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = np$ خواهد شد:

به عبارت دیگر:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 1}} \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-np} \cdot (np)^{x}}{x!}$$

⚠ اگر در توزیع دو جمله‌ای $n \geq 25$ باشد مشروط بر آنکه $p \to 0$ یا $p \to 1$ باشد،

می‌توان از توزیع پواسن استفاده کرد.

تذکر: جدول توزیع تجمعی این متغیر برای مقادیر مختلف λ، (از ۰٫۱ تا ۱۸) نوشته شده که

AMAND

Subject:
Year: Month: Day:

در محاسبات از آن استفاده می‌شود.

مثال: گزارش شده است که به طور متوسط ۶ تصادف در طول روز در یک شهر رخ می‌دهد

مطلوبست محاسبه احتمال آنکه: حل: این آزمایش یک آزمایش پواسن است

الف: در یک روز معین هیچ تصادفی رخ ندهد. اگر X را تعداد تصادف تعیین کنیم،

ب: حداقل ۲ تصادف رخ دهد:

$$P(X,6) = \frac{e^{-6} \times 6^{x}}{x!}$$

ج: حداکثر ۱۰ تصادف رخ دهد:

الف: $P(X=0) = P(0,6) = \frac{e^{-6} \times 1}{1} = e^{-6} = \sum_{x=0}^{0} P(x,6) = F_X(0) = 0.0025$

ب: $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - 0.0174$

ج: $P(X \leq 10) = F_X(10) = 0.9332$

AMAND

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

بررسی چند توزیع پیوسته

توزیع گاما:

تابع گامای α:

تابع گامای α که با علامت $\Gamma(\alpha)$ و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \Rightarrow \Gamma(1) = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \overset{?}{=} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$$

توزیع گاما:

متغیر تصادفی X که دارای تابع احتمال پیوسته به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Subject:
Year: Month: Day:

را متغیر گاما و توزیع این متغیر را توزیع گاما با پارامترهای α و β می‌گویند.

قضیه: میانگین و واریانس توزیع گاما برابر است با:

$$\mu = \alpha\beta \quad , \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

www.ethar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین معلوم μ و واریانس معلوم σ^2 می‌باشد

به کمک جدول احتمال های زیر را محاسبه کنید

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = ?$$

$$= P\left(-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right) = P(-1 < Z < 1) = F_Z(1) - F_Z(-1) = \text{۰/۶۸۲۶}$$

$$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = P\left(-2 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 2\right) = F_Z(2) - F_Z(-2) = \text{۰/۹۵۴۴}$$

$$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = P\left(-3 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 3\right) = F_Z(3) - F_Z(-3) = \text{۰/۹۹۷۴}$$

نتیجه گیری:

در یک توزیع نرمال ۶۸/۲۷ % مشاهدات جامعه در بازه‌ی $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ قرار دارند

Subject:
Year: Month: Day:

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد تحت شرایطی، توزیع گستسهٔ دوجمله‌ای به توزیع پیوسته میل می‌کند.

قضیه - تقریب دوجمله‌ای به کمک نرمال

اگر X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با توزیع $b(x;n,p)$ باشد، آنگاه شکل حدی توزیع متغیر تصادفی $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ یک توزیع نرمال استاندارد خواهد شد هنگامی که $n\to\infty$

(n تعداد دفعات یا تعداد نمونه)

اگر این قضیه هنگامی که $n\geq 30$ باشد می‌توان استفاده کرد.

مثال: متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=12$ و $p=\frac{1}{2}$ است. (توزیع متغیر X، توزیع دوجمله‌ای $b(x;12,\frac{1}{2})$ است) مطلوبست محاسبهٔ احتمالات زیر به دو روش

۱- به کمک جدول ۲- استفاده از تقریب نرمال

الف) $P(4\leq X\leq 7)=?$ ب) $P(X=5)=?$

$$b(x,12,\frac{1}{2})=\binom{12}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-x}$$

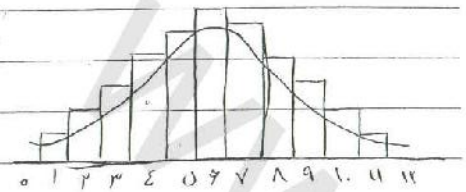
الف) $P(4\leq X\leq 7)=F_{x}(7)-F_{x}(4)=0/7342$

Subject:
Year: Month: Day:

ب) $P(X=5)=F_{x}(5)-F_{x}(4)=0/1930$

$\mu=np=12\times\frac{1}{2}=6$

$\sigma=\sqrt{12\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$



$n(x,6,\sqrt{3})$

الف) $P(4\leq X\leq 7)\simeq P(3/5<X<7/5)=P\left(\frac{3/5-6}{\sqrt{3}}<Z<\frac{7/5-6}{\sqrt{3}}\right)$

$=0/7342$

ب) $P(X=5)\simeq P(4/5<X<5/5)=P\left(\frac{4/5-6}{\sqrt{3}}<Z<\frac{5/5-6}{\sqrt{3}}\right)$

$=0/1937$

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

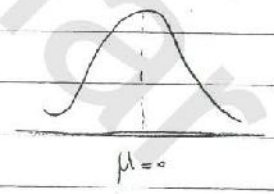
توزیع t

نوعی توزیع پیوسته است و بصورت تابعی از قضیه زیر نتیجه میشود.

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع توان دوم کای با درجه آزادی ν و متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد بوده و V و Z مستقل باشند، آنگاه توزیع متغیر تصادفی $T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}$ به توزیع t معروف است. (با درجه آزادی ν)

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} \qquad t\in\mathbb{R}$$

اگر $f(t)$ را به ازای یک مقدار دلخواه ν ($\nu\geq 30$) رسم کنیم بصورت زیر خواهد بود.



ضمناً ثابت میشود که $\mu=0$ ، $\sigma^2=\frac{\nu}{\nu-2}$

$(\nu\geq 30 \Rightarrow f_T(t)=f_Z(z))$

Samand

www.ttnar.ir
www.jozve.org

یک بازه اطمینان $100(1-\alpha)$ برای μ عبارت است از:

$$\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

از فرمول فوق در سه حالت متفاوت استفاده کرد:

۱) $n \geq 30$ ، جامعه دلخواه (تابع احتمال جامعه نامشخص) ، σ معلوم

۲) $n \geq 30$ ، " " " ، σ نامعلوم (استفاده از S به جای σ)

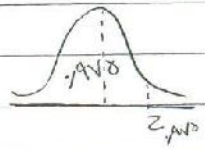
۳) $n < 30$ ، جامعه نرمال ، σ معلوم

مثال: یک نمونه تصادفی ۶۴ تایی از جامعه ای انتخاب و مشخص شده میانگین این نمونه $\bar{x}_{64} = 76$ و واریانس این نمونه $S^2 = 9$ می باشد. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای μ، میانگین واقعی این جامعه به کمک نمونه بدست آورید.

$$\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = ?$$



$$P(Z < z) = 0.975$$

$$Z = 1.96$$

صفحهٔ مقابل به اشتباه در این قسمت نوشته شده است.

در حالیکه محل صحیح آن صفحهٔ بعدی * است.

www.ketnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$۷۶ - ۱,۹۶\left(\frac{۳}{\sqrt{۶۴}}\right) < \mu < ۷۶ + ۱,۹۶\left(\frac{۳}{\sqrt{۶۴}}\right)$$

$a < \mu < b \Rightarrow \mu \in (a,b)$ با ۹۵٪ اطمینان

محاسبهٔ خطا در برآورد μ بوسیلهٔ $\bar{x}$

می‌دانیم یک بازه اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای μ عبارت است از

$$\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{+(-\bar{x})}$$

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu - \bar{x} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\underbrace{|\mu - \bar{x}|}_{\text{خطا}} < \underbrace{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}_{\text{کران بالای خطا}}$$

در برآورد μ بوسیلهٔ $\bar{x}$ با $(1-\alpha)100\%$ اطمینان می‌توان گفت خطا کمتر از مقدار $e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ است.

$$e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}(\sigma)}{e} \Rightarrow$$

$$n = \left[\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}(\sigma)}{e}\right)^2\right]$$

جزء صحیح

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

جامعه‌ها و نمونه‌ها (Population & Samples)

تعریف (جامعه یا جمعیت): به مجموعهٔ همه اشیاء که پس از آزمایش تصادفی گردآوری شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد، جامعه یا جمعیت می‌گویند.

اندازه یا حجم جامعه: به تعداد عضوهای مجموعه می‌دهد، اندازهٔ جامعه یا حجم جامعه می‌گویند و با N نشان می‌دهند.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم گروه خونی ۱۰۰۰ دانشجو را مورد بررسی قرار دهیم. این عمل یک آزمایش تصادفی است. پس از این آزمایش، ۱۰۰۰ عدد خواهیم داشت که این اعداد مقدارهایی از یک متغیر تصادفی مانند X می‌باشند که X، هشت مقدار را اختیار می‌کند.

X: نشان‌دهندهٔ گروه خونی هر نفر $\quad X: x = 1, 2, \ldots, 8 \quad (1 \to O^+ \quad 2 \to AB^- \ldots)$

$1, 2, 8, 7, 2, 6, 4, 5, 1, 2, \ldots$

جامعه مجموعه‌ای از مشاهدات است ← مشاهدات مقدارهایی از یک متغیر تصادفی مانند X است ←

SAMAND

www.ethar.ir
www.ijozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

هر متغیری مانند X دارای یک تابع احتمال $f_X(x)$ است ← هر تابع احتمال دارای μ و σ^2 است

پس هر جامعه دارای μ و σ^2 است.

هر جامعه‌ای دارای یک اسم است. اسم جامعه همان اسم توزیع احتمال است.

جامعه: ۱- متناهی (در عمل کوچک)

۲- نامتناهی (در عمل بزرگ)

جامعه بزرگ ← به چند مشاهدات دسترسی نیست ← به متغیر X دسترسی نیست ← به تابع احتمال $f_X(x)$ دسترسی نیست ← به μ و σ^2 دسترسی نیست

در جامعه بزرگ به μ و σ^2 پارامترهای جامعه می‌گویند.

نمونه چیست؟ هر زیرمجموعه از یک جامعه را نمونه می‌گویند. نمونه هم از مشاهدات تشکیل شده است.

نمونه تصادفی: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$، n متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان

Subject:
Year: Month: Day:

$f_X(x)$ باشد، آنگاه این n متغیر را یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با تابع احتمال $f_X(x)$ می‌گوییم.

واضح است که $\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \dots = \mu_{X_n} = \mu_X = \mu_{\text{جامعه}}$ و

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2} = \dots = \sigma^2_{X_n} = \sigma^2_X = \sigma^2_{\text{جامعه}}$$

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(x_1)\, f_X(x_2) \dots f_X(x_n)$$

بصورت کاربردی نمونه تصادفی را متوالی به شکل زیر نیز تعریف کرد

نمونه تصادفی: یک نمونه تصادفی با اندازه n، نمونه‌ای است که هر نمونه تصادفی دیگر همان شانس انتخاب شدن را داشته باشد.

نمونه تصادفی (مشاهدات) ← یک متغیر تصادفی تعریف می‌کنیم به نام آماره ← تابع احتمال آماره ← میانگین و واریانس (نمونه)

آماره:

هر تابعی از یک نمونه تصادفی n تایی، که فاقد پارامتر مجهول باشد را آماره یا آمار می‌گویند

www.ethar.ir
www.ijozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

به عبارت دیگر اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از جامعه‌ای با توزیع احتمال $f_X(x)$ باشد، هر تابعی مانند $g(X)$ از متغیرهای $X_1, \dots, X_n$ را آماره می‌گوییم. مثلاً:

$$g(x) = X_1 + X_n \qquad g(x) = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$k(x) = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} \longrightarrow$$ چون μ مجهول است، پس آماره نیست

توجه: از یک نمونهٔ تصادفی، بی‌شمار آماره مانند $g(x)$ می‌توان ساخت. با توجه به تعریف آماره‌ها متغیر تصادفی می‌باشند.

آماره‌های مهم عبارتند از:

۱- آمارهٔ میانگین ۲- آمارهٔ میانه ۳- آمارهٔ مد ۴- آمارهٔ برد

۵- آمارهٔ واریانس (S^2) ۶- آمارهٔ واریانس (S'^2)

آمارهٔ میانگین (Mean)

آمارهٔ میانگین را با علامت تابعی $\bar{X}_n$ نشان داده و برای نمونه‌ای تصادفی به صورت

Subject:
Year: Month: Day:

$X_1, \dots, X_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

آمارهٔ میانه (Median)

میانه را با علامت تابعی $\tilde{X}$ (ایکس تیلدا) نشان می‌دهند و برای نمونه تصادفی n تایی که به ترتیب صعودی $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ مرتب شده باشند برابر است با مقدار میانی مشاهدات اگر n فرد باشد و نصف مجموع دو مقدار میانی اگر n زوج باشد.

آمارهٔ مد - نما (Mode)

آمارهٔ مد را با M نشان داده و مقدار این آماره برای یک نمونهٔ تصادفی n تایی با مشاهدات $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با مشاهداتی که بیشترین فراوانی را دارند.

از این سه آماره مخصوصاً $\bar{X}_n$ در قسمت کلی بعدی برای محاسبه μ میانگین جامعه استفاده خواهیم کرد.

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

آمارهٔ برد : Range

آمارهٔ برد را با R نشان داده و مقدار این آماره برای نمونه‌ای تصادفی با اندازه n که به ترتیب صعودی مرتب شده باشند $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ ، $R = x_n - x_1$

آمارهٔ واریانس S^2

این آماره را با S^2 نشان داده و برای نمونهٔ تصادفی بصورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

آمارهٔ واریانس S'^2 :

این آماره به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

تذکر : با توجه به تعریف S^2 و S'^2 اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، $(n \ge 30)$ ، S'^2 با S^2 یکسان می‌شود. اما اگر $n < 30$ باشد نشان می‌دهیم که S^2 آمارهٔ بهتری از S'^2 است

Subject:
Year: Month: Day:

از این سه آماره (R, S'^2, S^2) به ترتیب طی بعد برای برآورد σ^2 واریانس جامعه استفاده خواهیم کرد.

قضیه : اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه :

$$\mu_{\bar{x}_n} = E(\bar{X}_n) = \mu_{\text{جامعه}}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_n} = \frac{\sigma^2_{\text{جامعه}}}{n}$$

اثبات :

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n} E(x_1 + \dots + x_n)$$

$$= \frac{n\mu}{n} = \mu \quad \checkmark$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_n} = \sigma^2_{\frac{1}{n}\sum x_i} = \frac{1}{n^2}\sigma^2_{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{1}{n^2}(\sigma^2_{x_1} + \dots + \sigma^2_{x_n})$$

$$= \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \checkmark$$

قضیه : اگر S^2 واریانس یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه :

$$E(S^2) = \sigma^2 \qquad E(S'^2) \ne \sigma^2 \qquad E(S'^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

www.itnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

در برآورد μ توسط $\bar{x}$ با $(1-\alpha)100\%$ اطمینان می‌توان گفت که خطا کمتر از مقدار e است. اگر تعداد نمونه $n=\left[\left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e}\right)^2\right]$ اختیار کنیم.

محاسبه فاصله اطمینان برای μ هنگامی که $n<30$، جامعه نرمال، σ نامعلوم

می‌دانیم در این شرایط اگر به جای σ از S استفاده کنیم، توزیع آماره $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (1)

توزیع t با درجه آزادی $n-1$ است.

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}<T<t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha \quad (3)$$

از تساوی ۳ نتیجه زیر بدست می‌آید.

$$P\left(\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)<\mu<\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{n}\right)\right)=1-\alpha \quad (4)$$

از ۴ نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه: یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای μ (در شرایطی که $n<30$، جامعه نرمال، σ نامعلوم) عبارت است از:

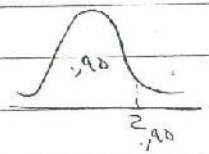
$$\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)<\mu<\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

مثال: یک بازه اطمینان ۹۰٪ برای μ جامعه نرمال بدست آورید در صورتیکه بدانیم $\sigma^2=4$ و میانگین یک نمونه ۲۵ تایی از این جامعه $\bar{x}_{25}=20$ گزارش شده است.

$$\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)<\mu<\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$1-\alpha=0.9 \Rightarrow \alpha=0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.05$

$z_{1-0.05}=z_{0.95}=?$



$P(Z<z)=0.95$

$z_{0.95}=1.645$

$$20-\left(1.645\times\frac{2}{\sqrt{25}}\right)<\mu<20+\left(1.645\times\frac{2}{\sqrt{25}}\right)$$

$e=\frac{1.645\times 2}{\sqrt{25}}$ (کران بالای خطا) حداکثر خطا

www.itnar.ir
www.ijzve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: از جامعه‌ی نرمال یک نمونه تصادفی انتخاب و نتایج زیر بدست آمده است.

$x_1=3$ ، $x_2=1$ ، $x_3=3$ ، $x_4=4$ ، $x_5=4$

$3, 1, 3, 4, 4 \Rightarrow n=5$

یک فاصله‌ی اطمینان ۰/۹۹ برای μ میانگین واقعی این جامعه بدست آورید.

$x_1, x_2, \dots, x_5 \rightarrow \bar{x}_5 = 3$

$\rightarrow S^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$1-\alpha = 0/99 \Rightarrow \alpha = 0/01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/005$

$t_{1-0/005} = t_{0/995} =$ از جدول $= 4/6$

$\nu = 4$

$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

$3 - \left(4/6 \times \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{5}}\right) < \mu < 3 + \left(4/6 \times \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{5}}\right)$

طول بازه اطمینان: $L = b - a = \left(\bar{x}_1 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x}_1 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$L = 2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2e \quad e \rightarrow 0 \Rightarrow L \rightarrow 0$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

یک بازه اطمینان چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد؟

۱- ضریب اطمینان بالا داشته باشد

۲- طول بازه کم باشد.

تعیین فاصله‌ی اطمینان برای پارامتر θ ، $\theta = \sigma^2$

می‌دانیم یک برآوردگر خوب برای σ^2 ، برآوردگر S^2 است. بنابراین یک مقدار برای این برآوردگر هنگامی که نمونه‌ی تصادفی بصورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ اخذ شود و مقدار S_n^2 که می‌گوییم برآورد نقطه‌ای خوبی برای σ^2 است.

از طرفی می‌دانیم (تحت شرایطی): $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ① توان دوم کای با درجه آزادی $n-1$ را و نیز می‌دانیم:

$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < X < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$ ②

$① , ② \Rightarrow P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$ ③

SAMAND

www.ethar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

از ۳ دو نتیجه می‌گیریم:

۱- یک بازه اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای σ^2 واریانس واقعی جامعه (هنگامیکه فرض برای تعداد نمونه‌ها n ، $n<30$ ، از جامعه‌ای با توزیع نرمال اختیار شود) برابر است با:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$$

۲- یک بازه اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای σ انحراف معیار عبارتست از:

$$S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}}}$$

مثال: در مثال قبلی یک بازه اطمینان ۹۹٪ برای σ^2 و σ (واریانس و انحراف معیار واقعی جامعه) بدست آورید.

$S^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{3}{2}}$

x_i	x_i^2
۳	۹
۱	۱
۳	۹
۴	۱۶
۴	۱۶
$\sum x_i = 15$	$\sum x_i^2 = 51$

$$S^2 = \frac{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)}$$

$$S^2 = \frac{5\times 51 - (15)^2}{5\times 4} = \frac{255-225}{20} = \frac{3}{2}$$

Subject:
Year: Month: Day:

$1-\alpha = 0/99 \Rightarrow \alpha = 0/01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/005$

$\chi^2_{0/005} = 2/4$ از جدول $= 0/207$ ، $\chi^2_{0/995} = 14/9$ از جدول

$$\frac{4\times\frac{3}{2}}{14/9} < \sigma^2 < \frac{4\times\frac{3}{2}}{0/207}$$

تعیین کردن نقطه و برآورد فاصله اطمینان برای پارامتر $\theta = \mu_1 - \mu_2$ (تفاضل میانگین دو جامعه)

می‌دانیم یک برآوردگر خوب برای پارامتر $\mu_1 - \mu_2$ ، برآوردگر $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ است.

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

این برآوردگر نااریب است. (امید ریاضی = پارامتر جامعه)

در نتیجه یک مقدار از این برآوردگر هنگامیکه دو نمونه تصادفی مستقل با اندازه‌های n_1 و n_2 از این جامعه انتخاب و $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ آن محاسبه شود، برآورد نقطه‌ای خوبی برای $\mu_1 - \mu_2$ است (مقدار $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ تخمین نقطه‌ای خوبی برای $\mu_1 - \mu_2$ است)

می‌دانیم تحت شرایطی توزیع برآوردگر (آماره) $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ توزیع نرمال با میانگین $\mu_1 - \mu_2$ و

www.ettnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

واریانس $\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ است. یا به عبارت دیگر:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \underline{1}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$ $\underline{2}$

$$\underline{1},\underline{2} \Rightarrow P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} P\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1-\alpha \quad \underline{3}$$

از فرمول ۳ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

یک بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای پارامتر $\mu_1-\mu_2$ (تفاضل میانگین دو جامعه) عبارت است از:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

۳۲

Subject:
Year: Month: Day:

از این فرمول در سه حالت می‌توان استفاده کرد. این سه حالت همان شرایطی است که $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ دارای توزیع نرمال می‌شود.

۱) $n_1, n_2 \geq 30$، دو جامعه دلخواه و مستقل (یا دو نمونه مستقل)، σ_1^2 و σ_2^2 معلوم

۲) $n_1, n_2 \geq 30$، 〃 〃 〃 〃، σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم

به جای σ_1^2 و σ_2^2 از S_1^2 و S_2^2 در فرمول استفاده شود.

۳) $n_1, n_2 < 30$، دو جامعه نرمال مستقل یا دو نمونه مستقل، σ_1^2 و σ_2^2 حتماً باید معلوم باشند.

تعیین برآورد نقطه و برآورد بازه اطمینان برای پارامتر $\theta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ و $\theta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

می‌دانیم یک برآوردگر خوب برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، برآوردگر $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ است. بنابراین یک مقدار از این برآوردگر هنگامی که دو نمونه تصادفی مستقل با اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعه‌ی نرمال اختیار و مقدار $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ آن محاسبه شود، این مقدار برآورد خوبی برای نسبت $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ است.

می‌دانیم توزیع برآوردگر $\frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ یک توزیع F با درجات آزادی به ترتیب $\nu_1 = n_1 - 1$ و $\nu_2 = n_2 - 1$ است.

$$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \quad (1)$$

www.itnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

از طرفی داریم:

$$P\left(f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2) < F < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

$$(1),(2) \Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

نتایج زیر از قضیه‌ی ۲ بدست می‌آید:

۱) یک بازه اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای پارامتر $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (نسبت واریانس‌های دو جامعه نرمال مستقل) عبارت است از:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)}$$

$f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)$ — مساحت سمت راست

$f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)$ — مساحت سمت چپ

۲- یک بازه اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ برابر است با:

$$\frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)}} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{S_1}{S_2}\sqrt{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)}$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: از دو جامعه مستقل دو نمونه تصادفی با اندازه‌های $n_1=50$ و $n_2=100$ اختیار کرده و نتایج زیر بدست آمده است.

$$n_1=50 \Rightarrow \bar{x}_{50}=7.82,\quad S_1=0.24$$

$$n_2=100 \Rightarrow \bar{x}_{100}=6.75,\quad S_2=0.3$$

یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای پارامتر $\theta=\mu_1-\mu_2$ (تفاضل میانگین واقعی جامعه اول و دوم) تعیین کنید.

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

در این فرمول به جای σ_1^2 و σ_2^2 از S_1^2 و S_2^2 استفاده می‌کنیم چون نمونه‌ها بیشتر از ۳۰ تا هستند.

$$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025 \qquad z_{0.975}=1.96 \text{ از جدول}$$

$$(7.28-6.75)-1.96\sqrt{\frac{(0.24)^2}{50}+\frac{(0.3)^2}{100}} < \mu_1-\mu_2 < (7.28-6.75)-1.96$$

مثال: یک بازه اطمینان ۹۸٪ برای $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ تعیین کنید (نسبت انحراف معیار دو جامعه) هنگامی که در نمونه

SAMAND

www.ithar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

نمونه‌ی مستقل با اندازه‌ی $n_1=12$ و $n_2=25$ از دو جامعه نرمال انتخاب شده‌اند که واریانس‌های آنها برابر است

$S_1=4$, $S_2=3$

$$\frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_2,\nu_1)}} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{S_1}{S_2}\sqrt{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$$

$1-\alpha=0.98 \Rightarrow \alpha=0.02 \Rightarrow \alpha/2=0.01$

$$\left.\begin{array}{l} f_{0.99}(15,24)=2.89 \\ f_{0.99}(24,15)=3.29 \end{array}\right\} \text{از جدول}$$

بطور کلی برای تخمین یک پارامتر مانند θ از یک جامعه‌ی آماری، مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- برای پارامتر مورد نظر که θ نام گذاری شده، تعدادی برآوردگر تعریف می‌کنیم. ($\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots$)

۲- بین برآوردگرهای تعریف شده، نااریب‌ها را انتخاب می‌کنیم. ($E(\hat{\theta}_1)=\theta, \ldots$)

۳- بین برآوردگرهای نااریب، کارا ترین را انتخاب می‌کنیم (برآوردگری که کمترین واریانس را دارد)

۴- برای کارا ترین برآوردگر نتایج احتمال و توزیع احتمال تعریف می‌کنیم. (فرض کنیم توزیع برآوردگر نرمال است)

Subject:
Year: Month: Day:

۵- یک توزیع آماره‌ی برآوردگر و فرمول $P(W_{\alpha/2} < W < W_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$ یک بازه اطمینان بدست می‌آوریم.

تخمین برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای برای پارامتر $\theta=p$ (نسبت در آزمایش دو جمله‌ای)

$$b(x,n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

یک برآوردگر خوب برای پارامتر p، برآوردگر $\hat{p}=\frac{X}{n}$ است. که در آن X متغیر تصادفی دو جمله‌ای با توزیع $b(x,n,p)$ است.

$$\mu_{\hat{p}} = E(p) = E\left(\frac{X}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}X\right) = \frac{1}{n}\underbrace{E(X)}_{np} = \frac{np}{n} = p$$

پس برآوردگر $\hat{p}$ نااریب است.

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \sigma^2_{\frac{1}{n}X} = \frac{1}{n^2}\underbrace{\sigma^2_X}_{npq} = \frac{pq}{n}$$

و اما توزیع $\hat{p}$:

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\hat{p}-\mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}}$$

$\hat{p}$ تقریباً توزیع نرمال است (به شرط $n \geq 30$)

www.ethar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$$P(-z_{1-\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha \quad (1)$$

$$(1),(2) \Rightarrow P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < p < p + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 1-\alpha$$

در طرفین این نامساوی به جای p و q، مقدار تخمین نقطه‌ای آن را قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر به جای p و q، $\hat{p}$ و $\hat{q}$ را به کار می‌بریم

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) \simeq 1-\alpha \quad (4)$$

نتیجه: یک بازه اطمینان $(1-\alpha)$٪ برای پارامتر $\theta = p$ (نسبت در آزمایش دوجمله‌ای) عبارت است از:

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n}, \quad \hat{q} = 1-\hat{p}$$

($n \geq 30$ سه تعداد نمونه)

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از نوعی باطری قلمی انتخاب می‌کنیم و مشخص شده که ۱۰ عدد از این باطری‌ها ناسالم می‌باشند. یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای نسبت واقعی تعداد باطری‌های قلمی سالم از این کارخانه را تعیین کنید.

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$\hat{p} = \frac{x}{n}$ ، $\hat{q} = 1-\hat{p}$ (x تعداد کالای سالم در نمونه n تایی)

$n = 200$ ، $x = 190$

$$\hat{p} = \frac{190}{200} = \frac{19}{20} \qquad \hat{q} = 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$$

$$1-\alpha = 0.95 \longrightarrow \alpha = 0.05 \longrightarrow \alpha/2 = 0.025$$

$$z_{0.975} = \text{به کمک جدول} = 1.96$$

$$\frac{19}{20} - \left(1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{19}{20} \times \frac{1}{20}}{200}}\right) < p < \frac{19}{20} + \left(1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{19}{20} \times \frac{1}{20}}{200}}\right)$$

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

آزمون فرض آماری : testing hypotesis

در این قسمت ابتدا به فرض آماری و آزمون فرض پرداخته شده سپس چگونگی انجام مراحل یک آزمون فرض را به کمک نمونه تصادفی مشخص می‌کنیم.

تعریف : فرض آماری

یک فرض آماری عبارتست از بیان یا فرض در مورد پارامتر یک جامعه گفته شده بدون توجه به آنکه درست یا نادرست باشد.

مثال : ۶۰٪ دانشجویان از خوابگاه استفاده می‌کنند.

($P = 0.6$: احتمال آنکه یک دانشجو به تصادف انتخاب و خوابگاهی باشد. ۶۰٪ است)

مثال : ۳۰٪ دانشجویان از خوابگاه استفاده می‌کنند.

مثال : میانگین طول عمر لامپ نوع A : $\mu_A = 200$ ساعت است یا $\mu_A < 200$ ساعت

فرض آماری :

۱) سازنده : اگر پارامتر جامعه به طور دقیق مشخص شود. $\mu_A = 200$ یا $P = 0.6$

۲) مشتری : اگر پارامتر جامعه به طور دقیق مشخص نشود. $\mu_A < 200$ یا $P < 0.3$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

درستی یا نادرستی یک فرض آماری وقتی به طور دقیق مشخص می‌شود که تمام جامعه مورد بررسی قرار گیرد (کاری غیرممکن است) بنابراین تحقیق در مورد درستی یا نادرستی یک فرض آماری، اجباراً توسط نمونه تصادفی انجام می‌شود.

نمونه تصادفی ← باعث قبول فرض آماری
نمونه تصادفی ← رد فرض آماری

آزمون فرض:

تحقیق در مورد درستی یا نادرستی یک فرض آماری به کمک نمونه تصادفی را آزمون فرض می‌گویند.

یک فرض آماری چگونه باید بیان شود؟

یک فرض آماری به گونه‌ای بیان می‌شود که دو حدد رد آن باشیم، زیرا رد یک فرض آماری با قطعیت بیشتری انجام می‌گیرد.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم بررسی کنیم که یک سکه سالم است یا خیر.

فرض آماری : سکه سالم است — یک است — $P = 1/2$ (احتمال شیر یا خط ۷)

فرض آماری : سکه سالم نیست — یک نیست — $P \neq 1/2$ (احتمال شیر یا خط)

$b(x, n, p) =$ ... $x = 0, 1, \dots, n$ و $n = 10$ و $P = \frac{1}{2}$

SAMAND

www.ethar.ir
www.ijzve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$P(X \leq 35) = P(X < 35.5) = P\left(Z < \frac{35.5 - 50}{5}\right) = 0.002$

در جدول — نرمال

احتمال آنکه سر ۱۰ مرتبه پرتاب یک سکه سالم،

$\mu = np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

کمتر از ۳۵ شیر مشاهده شود، ۰/۰۰۲ است.

$\sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 5$

چون سکه سالم نیست" رد میشود

فرض

در بحث آزمون فرض دو نوع فرض آماری تعریف میشود.

۱- فرض صفر (فرض خنثی)

یک فرض آماری را که برای رد شدن تنظیم میشود، فرض صفر می‌گوییم و با علامت H_0 نشان می‌دهیم. فرض صفر چون شرایط موجود را نشان می‌دهد معمولاً یک فرض مساوی است)

$H_0: \theta = \theta_0$

۲- فرض مقابل

یک فرض آماری که در مقابل فرض صفر قرار می‌گیرد را فرض مقابل می‌گوییم و با H_1 نشان می‌دهیم.

$H_1 = \theta \neq \theta_0$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

$H_0: p = \frac{1}{2}$ سکه سالم

$H_1: p \neq \frac{1}{2}$ سکه ناسالم

در بحث آزمون فرض عموماً دو نوع خطا وجود دارد. عامل خطا نمونه است.

۱- خطای نوع اول ۲- خطای نوع دوم

خطای نوع اول:

اگر فرض H_0 را رد کنیم در صورتیکه درست باشد، خطای نوع اول را مرتکب شده‌ایم. (این خطا یک پیشامد است.) احتمال مرتکب شدن این نوع خطا را سطح تشخیص یا میزان معنی‌دار بودن گویند و با α نشان می‌دهند.

$\alpha = P(\text{رد فرض } H_0 \mid H_0 \text{ درست باشد})$

خطای نوع دوم:

اگر فرض H_0 را قبول کنیم در صورتیکه نادرست باشد، خطای نوع دوم را مرتکب شده‌ایم. احتمال وقوع این خطا را با β نشان می‌دهند.

$\beta = P(\text{قبول } H_1 \mid H_0 \text{ درست نباشد})$

SAMAND

www.ittnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

یا $\beta = P(\text{قبول } H_0 \mid H_1 \text{ درست باشد})$

در عمل آزمون فرض خط‌کش دو ناحیه تعریف می‌شود.

۱- ناحیهٔ رد (بحرانی)

ناحیه‌ای که در صورت قرار گرفتن آماره در آن ناحیه باعث تصمیم‌گیری در رد فرض H_0 شود را

ناحیهٔ رد یا بحرانی می‌گوییم

۲- ناحیهٔ قبولی:

ناحیه‌ای که در صورت قرار گرفتن آماره در آن ناحیه باعث تصمیم‌گیری در قبول فرض H_0 شود را

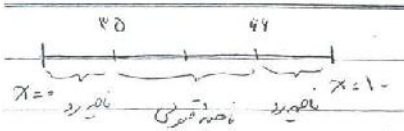
ناحیهٔ قبولی می‌نامیم.

نقاط مرزی بین این دو ناحیه را نقاط بحرانی می‌گوییم.

فرض کنید می‌خواهیم آزمون بصورت $\begin{cases} H_0: p = \frac{1}{2} & \text{سکه سالم است} \\ H_1: p \neq \frac{1}{2} & \text{سکه ناسالم است} \end{cases}$ را ناحیه‌بندی کنیم

Subject:
Year: Month: Day:

ناحیهٔ رد $\begin{cases} X \leq 35 \\ X \geq 66 \end{cases}$



ناحیهٔ قبولی $35 < X < 66$

آیا α و β را می‌توان محاسبه کرد؟ آیا می‌توان α و β را جزء بحرانی کاهش داد؟

مثال: گزارش شده است که میانگین قد دانشجویان یک دانشگاه $\mu = 170^{cm}$ و با انحراف معیار

$\sigma = 9\ cm$ است. برای بررسی این گزارش (درستی یا نادرستی این فرض آماری) آزمون‌های زیر را بصورت

زیر انجام داده‌ایم.

1) $\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu \neq 170 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu = 175 \end{cases}$

دو نمونهٔ تصادفی $n = 36$ و $n = 64$ اختیار و به کمک یک ناحیهٔ بحرانی دلخواه α و β را محاسبه کنید.

در آزمون ۱: ابتدا برای $n = 36$ می‌نویسیم.

می‌دانیم یک آماره (برآوردگر) مناسب برای μ، آمارهٔ $\bar{X}$ است. چون نمونه $n = 36$ است،

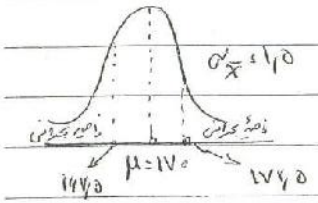
بنابه قضیهٔ حد مرکزی، $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال است. $\mu_{\bar{X}} = 170$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{9}{\sqrt{36}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$

www.ittnar.ir
www.jozve.org

www.ttnar.ir

www.jozve.org



$$\begin{cases} \bar{X} < 167.5 \\ \bar{X} > 172.5 \end{cases}$$ ناحیه بحرانی دلخواه

$167.5 < \bar{X} < 172.5$ ناحیه قبولی

$$\alpha = P(\bar{X} < 167.5 \mid \mu = 170) + P(\bar{X} > 172.5 \mid \mu = 170) =$$

$$= 2P(\bar{X} < 167.5 \mid \mu = 170) = 2P\left(Z < \frac{167.5 - 170}{1.5}\right) = 0.097$$

$$\beta = P(167.5 < \bar{X} < 172.5 \mid \mu \neq 170) =$$ قابل محاسبه نیست

در آزمون ۲ :

$\alpha = 0.097$

$$\beta = P(167.5 < \bar{X} < 172.5 \mid \mu = 175) = P\left(\frac{167.5 - 175}{1.5} < Z < \frac{172.5 - 175}{1.5}\right)$$

$$= 0.04$$

اگر $n = 64$ را در نظر بگیریم:

$$\sigma = \frac{9}{\sqrt{64}} = \frac{9}{8} = 1.125$$

$$\alpha = P(\bar{X} < 167.5) + P(\bar{X} > 172.5) = 2P\left(Z < \frac{167.5 - 170}{1.125}\right) = 0.02$$

$$\beta = P(167.5 < \bar{X} < 172.5) = P\left(\frac{167.5 - 170}{1.125} < Z < \frac{172.5 - 170}{1.125}\right) = 0.01$$

$n = 36$: $\begin{cases} \alpha = 0.09 \\ \beta = 0.05 \end{cases}$ $\qquad$ $n = 64$: $\begin{cases} \alpha = 0.02 \\ \beta = 0.01 \end{cases}$

در توزیع نرمال بهتر است به جای آنکه ناحیه بحرانی را دلخواه انتخاب کرده و مقدار α را محاسبه کنیم، می‌توان برعکس عمل کرد. به عبارت دیگر در چنین آزمون فرض‌هایی ابتدا α را انتخاب و به کمک آن ناحیه بحرانی مشخص می‌شود. معمولاً مقادیر α را ۰/۰۵ یا ۰/۰۱ انتخاب می‌کنیم. اگر در مسئله آزمون فرض α را مشخص نکرده، $\alpha = 0.05$ اختیار می‌شود. (آزمون در سطح تشخیص ۰/۰۵ انجام می‌شود.)

* آزمون‌های یک طرفه و دو طرفه:

آزمون یک طرفه به آزمون فرض می‌گویند که فرض مقابل آن یک طرفه باشد. به عبارت دیگر، آزمون

Subject:
Year: Month: Day:

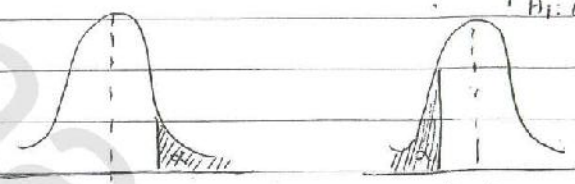
بصورت زیر باشد:

$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_1 \end{cases}$

مثال:

مثال: $\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu < 170 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0: \mu = 170 \\ H_1: \mu > 170 \end{cases}$

از ویژگی یک آزمون یک طرفه آن است که ناحیهٔ بحرانی آن یک طرفه بوده و در یک سمت توزیع قرار می‌گیرد. (اگر آزمون بصورت $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$ باشد، ناحیهٔ بحرانی سمت چپ توزیع قرار می‌گیرد. و اگر $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$ باشد، ناحیهٔ بحرانی در سمت راست توزیع قرار می‌گیرد.



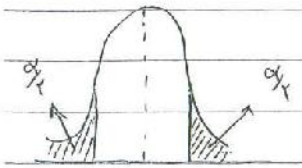
$H_0: \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu < \mu_0$

* آزمون فرض دوطرفه به آزمون فرضی می‌گویند که فرض مقابل آن دو طرفه باشد، به عبارت دیگر باشد $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$

Subject:
Year: Month: Day:

از ویژگی آزمون‌های دو طرفه آن است که ناحیهٔ بحرانی در دو سمت توزیع قرار می‌گیرد.



$H_0: \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

بطور کلی برای انجام یک آزمون هشتگانه از توزیع‌های بویژه استفاده می‌شود (آماره‌ای مورد نظر یکی از توزیع‌های بویژه را دارا باشد)، مراحل زیر اجرا می‌شود.

۱- تشکیل فرض H_0 $\quad$ $H_0: \theta = \theta_0$

۲- تشکیل فرض مقابل $H_1: \theta < \theta_0$ یا $\theta > \theta_0$ یا $\theta \neq \theta_0$

۳- انتخاب سطح مشخص آزمون (انتخاب مقدار α)

۴- انتخاب آماره‌ی مناسب برای θ و تشخیص نوع توزیع آماره یا برآوردگر

۵- تشکیل ناحیهٔ بحرانی به کمک α و توزیع آماره

۶- محاسبات: به کمک نمونه انتخاب مقدار آماره مشخص می‌شود.

www.ethnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

۷) نتیجه‌گیری: اگر مقدار آماره در ناحیهٔ بحرانی قرار گیرد، فرض H_0 رد می‌شود. در غیر این صورت نمی‌توانیم دلیلی برای رد H_0 پیدا کنیم.

مثال: گزارش شده است که میانگین طول عمر نوعی لامپ، $\mu = 120$ ساعت با انحراف معیار $\sigma = 30$ ساعت است. کارخانه‌ای ادعا می‌کند لامپ جدیدی از این نوع تولید کرده که دارای میانگین طول عمر بیشتر از ۱۲۰ ساعت است. برای بررسی این ادعا یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از این نوع لامپ جدید انتخاب و مشخص شده است که میانگین طول عمر این نمونه $\bar{x}_{10} = 1265$ ساعت است. در مورد این ادعا چه اظهار نظری می‌توان کرد؟ به عبارت دیگر می‌خواهیم آزمونی با سطح معنی‌داری داشته باشیم که $H_0: \mu = 120$ ، $H_1: \mu > 120$ باشد. (سطح تشخیص $\alpha = 0.05$ است)

۱) $H_0: \mu = 120$ ← آزمون یک طرفه

۲) $H_1: \mu > 120$

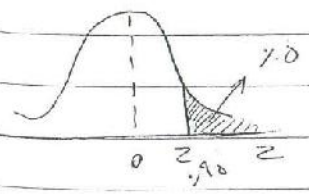
۳) $\alpha = 0.05$ (آزمون یک طرفه)

۴) $\bar{x}$ = آماره نمونه برای میانگین، μ

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

۵) توزیع $\bar{x}$ نرمال است چون ($n \geq 30$ ، $n = 10$) است. یا نرمال استاندارد $Z_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



$Z_{0.95}$ = برگ جدول = 1.645

$Z > 1.645$ ناحیهٔ بحرانی

۶) محاسبات: $n = 10$ ، $\bar{x} = 1265$ ، $\sigma = 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1265 - 120}{\frac{30}{\sqrt{10}}} = 2.16$$

۷) نتیجه‌گیری: فرض H_0 رد می‌شود. می‌پذیریم ادعای این تولید کننده درست است.

مثال: میانگین یک نمونهٔ ۱۰ تایی از نوعی لامپ دارای طول عمر $\bar{x}_{10} = 1570$ و انحراف معیار $s = 120$ ساعت است. آزمونی با صورت زیر و در سطح تشخیص $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.01$ انجام دهید.

$H_0: \mu = 1600$ ← آزمون دو طرفه

$H_1: \mu \neq 1600$

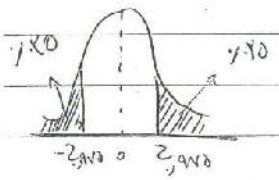
$\alpha = 0.05 \longrightarrow \alpha/2 = 0.025$

SAMAND

www.ethan.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

$\bar{x}$ آماره مناسب ، توزیع نرمال $\longrightarrow$ نرمال استاندارد $Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



ناحیه بحرانی $\begin{cases} Z > Z_{0/975} \\ Z < -Z_{0/975} \end{cases} \xrightarrow{\text{جدول}} \begin{cases} Z > 1/96 \\ Z < -1/96 \end{cases}$

محاسبات : $n = 100$ ، $\bar{x} = 1570$ ، $S = 120$

$Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1570-1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2/5$ $\longrightarrow$ این عدد در ناحیه بحرانی هست

نتیجه‌گیری: فرض H_0 رد میشود. چون Z منفی شده، پس بزرگتر شده است.

مثال: میانگین یک نمونه ۱۶ تایی از یک جامعه نرمال دارای $\bar{x}_{16} = 50$ و انحراف معیار $S = 5$ است. به کمک این نمونه آزمونی را بصورت زیر انجام داده‌ایم:

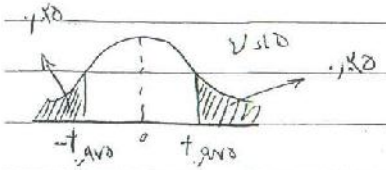
$\begin{cases} H_0: \mu = 42 \\ H_1: \mu \neq 42 \end{cases}$

$\alpha = 0/05 \rightarrow \alpha/2 = 0/025$: آزمون دوطرفه

$T = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$: توزیع آماره ، آماره مناسب $\bar{x}$ است (توزیع t با ۱۵ df است.)

AMAND

Subject:
Year: Month: Day:



ناحیه بحرانی $\begin{cases} t > t_{0/975} \\ t < -t_{0/975} \end{cases}$

از جدول $\longrightarrow \begin{cases} t > 2/13 \\ t < -2/13 \end{cases}$

محاسبات : جامعه نرمال ، $n = 16$ ، $\bar{x}_{16} = 50$ ، $S = 5$

$T = \dfrac{50-42}{\frac{5}{\sqrt{16}}} = 6/4$

نتیجه‌گیری: فرض H_0 رد میشود

مثال: از جامعه نرمال یک نمونه تصادفی انتخاب و نتایج زیر بدست آمده است: $(n=11)$

۰/۸ ، ۱/۸ ، ۱ ، ۰/۱ ، ۰/۹ ، ۱/۷ ، ۱ ، ۱/۶ ، ۰/۹ ، ۱/۲ ، ۰/۵

در سطح تشخیص: الف: $\alpha = 0/05$ آزمون بصورت $\begin{cases} H_0: \mu = 1 \\ H_1: \mu > 1 \end{cases}$ انجام می‌گیرد.

ب: $\alpha = 0/1$ آزمون بصورت $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 0/3 \\ H_1: \sigma^2 \neq 0/3 \end{cases}$ انجام می‌گیرد.

ب: به کمک نمونه $\bar{x}$ و S^2 را بدست می‌آوریم:

$\bar{x} = 1/08$

$S^2 = 0/24$

AMAND

www.ethnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: دو نمونه تصادفی با اندازه‌های $n_1=16$ و $n_2=14$ از دو جامعه نرمال انتخاب و نتایج زیر بدست آمده است.

$\bar{x}_1 = 75$ ، $S_1 = 6.1$ ، $n_1 = 16$

$\bar{x}_2 = 60$ ، $S_2 = 5.3$ ، $n_2 = 14$

آزمون فرض را در سطح تشخیص ۰.۱ به صورت زیر انجام دهید.

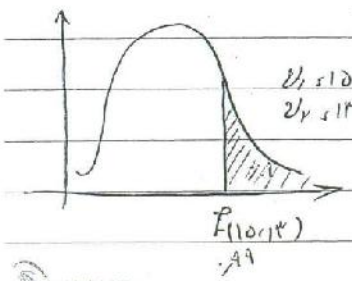
$$\begin{cases} H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1: \sigma_1 > \sigma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases} \longrightarrow \text{آزمون یک طرفه} \longrightarrow \alpha = 0.1$$

آماره مناسب $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ ، توزیع آماره $F(\nu_1, \nu_2) = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

$\nu_1 = 15$ ، $\nu_2 = 13$



ناحیه بحرانی: $F > F_{(15,13)}^{.99} = 3.82$

$F > 3.82$

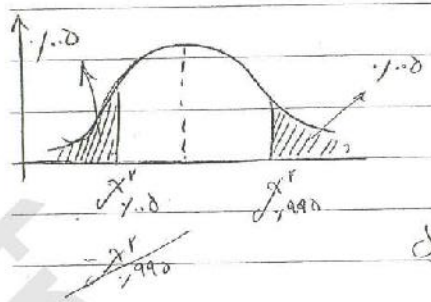
Subject:
Year: Month: Day:

$H_0: \sigma^2 = .3$

$H_1: \sigma^2 \neq .3$

آزمون دو طرفه $\longrightarrow \alpha = .1 \longrightarrow \alpha/2 = .05$

آماره مناسب S^2 ، توزیع آماره $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ و توزیع X توان دوم کای با ۱۰ درجه آزادی است.



ناحیه بحرانی $\begin{cases} X > \chi^2_{.995} \\ X < \chi^2_{.05} \end{cases}$

از جدول $\begin{cases} X > 25.2 \\ X < \end{cases}$

محاسبات: $n = 11$ ، $\bar{x} = 1.08$ ، $S^2 = .24$

$$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{10 \times .24}{.3} = 8$$

نتیجه‌گیری: فرض H_0 رد نمی‌شود.

www.ttnar.ir
www.jozve.org

Subject:
Year: Month: Day:

Subject:
Year: Month: Day:

$$f_c \frac{(۲,۱)^۲}{(۵,۳)^۲} \times ۱ = ۱,۱۵$$

نتیجه‌گیری: فرض H_0 رد نمی‌شود. یعنی واریانس یا انحراف معیار این دو جامعه یکی است

www.itnar.ir
www.jozve.org