

نام جزوه :

روش های انتگرال گیری

دانشکده علوم پایه - دانشگاه آزاد واحد کرج

گرد آورنده : مهران محمدی

ایمیل :

Mehran.m10_7@Yahoo.com

مقدمه

پیش از دو هزار سال پیش ارشمیدس (287-212 قبل از میلاد) فرمول هایی را برای محاسبه سطح و جرم ها ، ناحیه ها و حجم های جامد مثل کره ، مخروط و سهمی یافت . روش انتگرال گیری ارشمیدس استثنایی و فوق العاده بود . جبر ، نقش های بنیادی ، کلیات و حتی واحد اعشار را هم نمی دانست .

لیبنیز (1646-1716) و نیوتن (1642-1727) حسابان را کشف کردند . عقیده کلیدی آنها این بود که مشتق گیری و انتگرال گیری اثر یکدیگر را خنثی می کنند با استفاده از این ارتباط ها آنها توانستند تعدادی از مسائل مهم در ریاضی فوریر (1768-1830) در مورد رسانش گرما بوسیله سلسله زمان های مثلثاتی را می ، فیزیک و نجوم را حل کنند خواند تا نقش های بنیادی را نشان دهد . رشته های فوریر و جابجایی انتگرال امروزه در زمینه های مختلفی چون داروسازی و موزیک اجرا می شود .

گائوس (1777-1855) اولین جدول انتگرال را نوشت و همراه دیگران سعی در عملی کردن انتگرال در ریاضی و علوم فیزیک کرد . کایوچی (1789-1857) انتگرال را در یک دامنه همبستگی تعریف کرد . ریمان (1826-1866) و لیبنزگو (1875-1941) انتگرال معین را بر اساس یافته های مستدل و منطقی استوار کردند .

لیوویل (1809-1882) یک اسکلت محکم برای انتگرال گیری بوجود آورد بوسیله فهمیدن اینکه چه زمانی انتگرال نامعین از نقش های اساسی دوباره در مرحله جدید خود نقش اساسی مرحله بعد هستند . هرمیت (1822-1901) یک شیوه علمی برای انتگرال گیری به صورت عقلی و فکری (یک روش علمی برای انتگرال گیری سریع) در دهه 1940 بعد از میلاد استراسکی این روش را همراه لگاریتم توسعه بخشید .

در دهه بیستم میلادی قبل از بوجود آمدن کامپیوترها ریاضیدانان تئوری انتگرال گیری و عملی کردن آن روی جداول انتگرال را توسعه داده بودند و پیشرفت هایی حاصل شده بود . در میان این ریاضیدانان کسانی چون واتسون ، تیچمارش ، بارنر ، ملین ، میجر ، گرانبر ، هوفرتر ، اردلی ، لوئین ، لیوک ، مگنوس ، آپل بلت ، ابرتینگر ، گرادشتاین ، اکستون ، سربواستاوا ، پرودنیف ، برایچیکف و ماریچیف حضور داشتند .

در سال 1969 رایسیچ پیشرفت بزرگی در زمینه روش علمی گرفتن انتگرال نامعین حاصل کرد . او کارش را بر پایه تئوری عمومی و تجربی انتگرال گیری با قوانین بنیادی منتشر کرد روش او عملاً در همه گروه های قضیه بنیادی کارگر نیست تا زمانی که در وجود آن یک معادله سخت مشتق گیری هست که نیاز دارد تا حل شود . تمام تلاش ها از آن پس بر روی حل این معادله با روش علمی برای موفقیت های مختلف قضیه اساسی گذاشته شد . ایت تلاش ها باعث پیشرفت کامل سیر و روش علمی رایسیچ شد . در دهه 1980 پیشرفت هایی نیز برای توسعه روش او در موارد خاص از قضیه های مخصوص و اصلی او شد .

از قابلیت تعریف انتگرال معین به نتایجی دست میایم که نشان دهنده قدرتی است که در ریاضیات می باشد (1988) جامعیت و بزرگی به ما دیدگاه موثر و قوی در مورد گسترش در ریاضیات و همچنین کارهای انجام شده در قوانین انتگرال می دهد . گذشته از این ریاضیات توانایی دارد تا به تعداد زیادی از نتیجه های مجموعه های مشهور انتگرال پاسخ دهد (اینکه بفهمیم این اشتباهات ناشی از غلط های چاپی بوده است یا نه) . ریاضیات این را ممکن می سازد تا هزاران مسئله انتگرال را حل نماییم به طوریکه تا کنون در هیچ یک از کتابهای دستنویس قبلی نیامده باشد . در آینده دیگر وظیفه ضروری انتگرال این است که به آزمایش تقارب خطوط ، ارزش اصلی آن و مکانیسم فرض ها بپردازد .

انتگرالها یک بحث اساسی ریاضیات عالی را تشکیل داده که میتوان کاربرد آنها در تمام علوم طبیعی، انسانی و غیره مورد مطالعه قرار داد.

نقاط ابتدا و انتهای بازه a و b اولین بار لایب نیتس نماد استاندارد برای انتگرال معرفی کرد .
نمادی برای متغیر انتگرال گیری است dx تابعی انتگرال پذیر است و f هستند و

یک کمیت بی نهایت کوچک را نشان می دهد. هر چند در تئوریهای جدید، انتگرال گیری بر پایه dx از لحاظ تاریخی متفاوتی پایه گذاری شده است.

فرمولهای مهم انتگرال گیری

1. $\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$

2. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

3. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

4. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$

5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

6. $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c$

7. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$

8. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$

9. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + c$

10. $\int \sec^2 u \, du = \int (1 + \tan^2 u) \, du = \tan u + c$

11. $\int \csc^2 u \, du = \int (1 + \cot^2 u) \, du = -\cot u + c$

12. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$

13. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$

14. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c, \quad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c, \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$

$$Z = \frac{e^{i\theta}}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{1-Z^2}{1+Z^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2Z}{1+Z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2Z}{1-Z^2}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

انتگرال گیری به کمک تغییر متغیر

معمولا در حل انتگرال هایی که شامل یک تابع و مشتق آن می باشند، از روش تغییر متغیر استفاده می شود.

مثال .

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$$

$$= \int \sin u \, du = \cos u + c = -\cos(\ln x) + c \quad u = \ln x, \, du = \frac{dx}{x} \quad \text{تغییر متغیر:}$$

مثال.

$$\begin{aligned}
 & \int (\cos^4 x) (\sin^3 x) dx \\
 &= \int (\cos^4 x) (\sin^2 x) (\sin x) dx = \int (\cos^4 x) (1 - \cos^2 x) (\sin x) dx \\
 &= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) (\sin x) dx \quad u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \quad \text{تغییر متغیر} \\
 &= \int (u^4 - u^6) (-du) = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c.
 \end{aligned}$$

مثال.

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} \quad x = t^2, \quad dx = 2t dt \quad \text{تغییر متغیر} \\
 &= \int \frac{2t dt}{t^2 - t} = 2 \int \frac{dt}{t-1} = 2 \ln |t-1| + c = 2 \ln |x^2 - 1| + c.
 \end{aligned}$$

مثال.

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{(\tan^{-1} x)(1+x^2)} \quad t = \tan^{-1} x \rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{تغییر متغیر} \\
 &= \int \frac{1}{t} dt = \ln t + c = \ln (\tan^{-1} x) + c
 \end{aligned}$$

مثال.

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \\
 &= \int \frac{e^x}{1+e^x} e^x dx \quad t = 1 + e^x \rightarrow dt = e^x dx \quad \text{تغییر متغیر} \\
 &= \int \frac{t-1}{t} dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln t + c = (1 + e^x) - \ln(1 + e^x) + c
 \end{aligned}$$

انتگرال گیری جزء به جزء

با استفاده از روش جزء به جزء می توان انتگرال های دشوار را به انتگرال های ساده تر تبدیل کرد. این روش در مورد انتگرال هایی به صورت $\int f(x)g(x)dx$ کاربرد دارد که در آن f تابعی است که پس از چند بار مشتق گرفتن صفر می شود و g تابعی است که می توان بارها و بدون هیچ مشکلی از آن انتگرال گرفت. معمولا f و g توابعی مانند $\sin x, \cos x, \ln x, e^x, x^n$ می باشند.

فرمول انتگرال جز به جز به صورت زیر می باشد که از قاعده $d(uv) = u dv + v du$ حاصل می شود.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

مثال.

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx & \quad u = x \rightarrow du = dx, \cos x dx = dv \rightarrow v = \sin x \\ & = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c. \end{aligned}$$

مثال.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx & \quad u = \ln x, dv = dx \implies du = \frac{dx}{x}, v = x \\ & = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c. \end{aligned}$$

نکته. برای انتخاب u و dv دقت کنید که u را تابعی می گیریم که پس از مشتق گیری ساده تر شود و dv را قسمتی می گیریم که محاسبه انتگرالش ساده باشد. به مثال بعد توجه کنید.

مثال.

$$\begin{aligned} \int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx & \quad u = \sin^{-1} x \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \\ & = -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + \int dx = -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + x + c. \end{aligned}$$

مثال.

$$\begin{aligned}
 \int x \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx & \quad u = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow du = -\frac{1}{x^2} \times \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\
 & \quad xdx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \\
 & = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\
 & = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int 2x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad t = 1+x^2 \rightarrow dt = 2xdx \\
 & = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{4} \sqrt{t} = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + c.
 \end{aligned}$$

حل کردن معادله انتگرالی نسبت به انتگرال مجهول

گاهی اوقات با یک بار استفاده از روش جز به جز، انتگرالی دیگر ظاهر می شود که شبیه انتگرال اولی می باشد. برای حل این نوع انتگرال ها باید دو بار از روش جز به جز استفاده کرد. مثال زیر را ببینید.

مثال.

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x} \cos 3x dx & \quad u = e^{2x}, dv = \cos 3x dx \implies du = 2e^{2x} dx, v = \frac{1}{3} \sin 3x \\
 & = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx \quad \star
 \end{aligned}$$

اکنون برای حل انتگرال $\int e^{2x} \sin 3x dx$ دوباره باید از جز به جز استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x} \sin 3x dx & \quad u = e^{2x}, dv = \sin 3x dx \implies du = 2e^{2x} dx, v = -\frac{1}{3} \cos 3x \\
 & = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx
 \end{aligned}$$

بنابراین با قرار دادن در رابطه $\star$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x} \cos 3x dx & = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx = \\
 & \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right) = \\
 & \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx
 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\int e^{2x} \cos 3x dx + \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{9}{13} \left(\frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x \right).$$

انتگرال گیری جز به جز به کمک تشکیل جدول

در زیر روش محاسبه انتگرال جز به جز به کمک تشکیل جدول با یک مثال نمایش داده شده است.

$f(x)$ و مشتقاتش		$g(x)$ و انتگرال هایش	
x^2	+	e^x	$\Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$
$2x$	-	e^x	
2	+	e^x	
0		e^x	

انتگرال گیری از حاصلضربها و توانهای توابع مثلثاتی

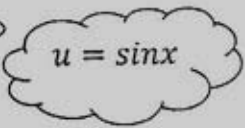
توان های فرد مثبت سینوس ها و کسینوس ها

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \int (\sin^{2n} x) (\sin x) dx = \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx = - \int (1 - u^2)^n du$$

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int \cos^{2n} x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx = \int (1 - u^2)^n du$$

مثال.

$$\begin{aligned}
 \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \\
 &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx \\
 &= \int (1 - u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c \\
 &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c.
 \end{aligned}$$



$$u = \sin x$$

انتگرال توان های زوج سینوس ها و کسینوس ها

در این انتگرال ها با استفاده از اتحادهای $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ سعی در کاهش توان های زوج و حذف ریشه ها داریم.

✓ کاهش توان های زوج.

مثال.

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)) dx \\
 &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.
 \end{aligned}$$

نکته. اگر حاصلضربی از توان های زوج سینوس و کسینوس داشته باشیم، آنها را تبدیل به فرم فوق می نمایم.

مثال.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx = \int \cos^4 x - \int \cos^6 x dx$$

حال انتگرال های بوجود آمده توان های زوجی از $\cos$ هستند که به روش بالا حل می شوند.

✓ حذف ریشه های دوم.

مثال.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos 4x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 \cos^2 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x| \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \sqrt{2} \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

انتگرال های سکا نت و کسکا نت

ایزاک بارون معلم آیزاک نیوتن در دانشگاه کمبریج، نخستین روش واضح محاسبه انتگرال سکانت را در کتاب خود به نام درس های هندسه عرضه کرد.

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c.\end{aligned}$$

بنابراین

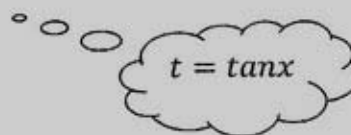
$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

انتگرال های $\int \sec^n x dx$ و $\int \csc^n x dx$ الف. اگر n زوج باشد.

برای محاسبه انتگرال توان های زوج $\sec$ و $\csc$ از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض کنید $n = 2k$ زوج باشد.
در مورد $\sec$ از تغییر متغیر $t = \tan x$ و در مورد $\csc$ از تغییر متغیر $t = \cot x$ به صورت زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned}\int \sec^n x dx &= \int (\sec^{n-2} x)(\sec^2 x) dx = \int (\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}} (\sec^2 x) dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}} (\sec^2 x) dx = \int (1 + t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt\end{aligned}$$



مثال.

$$\begin{aligned}\int \sec^6 x dx &= \int (\sec^4 x)(\sec^2 x) dx = \int (\sec^2 x)^2 (\sec^2 x) dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^2 (\sec^2 x) dx = \int (1 + t^2)^2 dt = \int (1 + 2t^2 + t^4) dt \\ &= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c.\end{aligned}$$

ب. اگر n فرد باشد.برای محاسبه انتگرال توان های فرد $\sec$ و $\csc$ از روش جز به جز استفاده می شود.

$$\int \sec^n x dx = \int (\sec^{n-2} x) \sec^2 x dx$$

$$\sec^{n-2} x = u \rightarrow du = (n-2) \sec^{n-3} x \sec x \tan x dx = (n-2)(\sec^{n-2} x)(\tan x) dx$$

$$\sec^2 x dx = dv \rightarrow v = \tan x$$

$$\begin{aligned}
\int \sec^n x dx &= \int (\sec^{n-2} x) \sec^2 x dx \\
&= (\tan x)(\sec^{n-2} x) - (n-2) \int (\tan^2 x)(\sec^{n-2} x) dx \\
&= (\tan x)(\sec^{n-2} x) - (n-2) \int (\sec^2 x - 1)(\sec^{n-2} x) dx \\
&= (\tan x)(\sec^{n-2} x) - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx
\end{aligned}$$

بنابراین

$$(n-1) \int \sec^n x dx = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2) \underbrace{\int \sec^{n-2} x dx}_{\text{برای حل این انتگرال}}$$

روش فوق را تکرار می کنیم

مثال.

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x dx &= \int \sec x \cdot \sec^2 x dx & u = \sec x &\rightarrow du = \sec x \tan x dx \\
& & dv = \sec^2 x dx &\rightarrow v = \tan x
\end{aligned}$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$$

$$\rightarrow \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$\rightarrow 2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\rightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + c.$$

انتگرال حاصلضرب های سینوس ها و کسینوس ها

$$\int \sin^n x \sin^m x dx \quad \text{و} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx \quad \text{و} \quad \int \cos^m x \cos^n x dx$$

با این انتگرال ها در موارد، جریان متناوب، مسائل انتقال گرما، خمش تیرها، تحلیل تنش کابلها در پل های معلق و مسائل مربوط به مهندسی و علوم و ریاضیات که در آنها از سری های مثلثاتی استفاده می شود، برخورد می کنیم.

برای حل آنها می توان دوبار از روش جزء به جزء استفاده کرد. ولی روش ساده تر استفاده از اتحادهای زیر است.

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

مثال.

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(3-5)x + \sin(3+5)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(-2x) dx + \frac{1}{2} \int \sin 8x dx = \frac{\cos(-2x)}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + c. \end{aligned}$$

انتگرال های $\int \tan^n x dx$ و $\int \cot^n x dx$

برای حل آنها به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{aligned} \int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx = \int t^{n-2} dt - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1} t^{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \end{aligned}$$

$t = \tan x$

اکنون برای حل $\int \tan^{n-2} x dx$ دوباره از همین روش استفاده می کنیم. با ادامه این روند، هر بار توان انتگرالده کمتر می شود تا به توان یک یا دو برسد که انتگرال آن ها شناخته شده است. مثال زیر را ببینید.

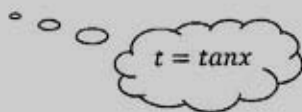
مثال.

$$\begin{aligned}
 \int \tan^8 x dx &= \int \tan^6 x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^6 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int \tan^6 x \sec^2 x dx - \int \tan^6 x dx = \frac{1}{7} \tan^7 x - \int \tan^4 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \int \tan^4 x \sec^2 x dx + \int \tan^4 x dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \tan^2 x dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \sec^2 x + \int dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + c.
 \end{aligned}$$

انتگرال های به فرم $\int \sec^n x \cdot \tan^m x dx$ و $\int \csc^n x \cdot \cot^m x dx$ (m, n صحیح)

الف) اگر n عددی صحیح مثبت و زوج باشد.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^n x \cdot \tan^m x dx &= \int \sec^{n-2} x \cdot \tan^m x \cdot \sec^2 x dx \\
 &= \int (\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \tan^m x \cdot \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \tan^m x \cdot \sec^2 x dx \\
 &= \int (1 + t^2)^{\frac{n-2}{2}} t^m dt
 \end{aligned}$$



$$t = \tan x$$

مثال.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^6 x \cdot \tan^3 x dx &= \int \sec^4 x \tan^3 x \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x)^2 \tan^3 x \sec^2 x dx \\
 &= \int (1 + t^2)^2 t^3 dt = \int (1 + t^4 + 2t^2) t^3 dt \\
 &= \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{8} t^8 + \frac{2}{6} t^6 + c = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{8} \tan^8 x + \frac{2}{6} \tan^6 x + c.
 \end{aligned}$$

ب) اگر m عددی صحیح مثبت و فرد باشد، داریم.

$$\begin{aligned}\int \sec^n x \cdot \tan^m x dx &= \int \sec^{n-1} x \cdot \tan^{m-1} x \cdot \sec x \tan x dx \\&= \int \sec^{n-1} x \cdot (\tan^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sec x \tan x dx \\&= \int \sec^{n-1} x \cdot (\sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sec x \tan x dx \\&= \int t^{n-1} (t^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} dt\end{aligned}$$



دقت کنید $\frac{m-1}{2}$ عددی صحیح است.

مثال.

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^6 x dx &= \int \sec^5 x \tan^2 x \sec x \tan x dx \\&= \int \sec^5 x (\sec^2 x - 1) \sec x \tan x dx \\&= \int (\sec^7 x - \sec^5 x) \sec x \tan x dx = \frac{1}{8} \sec^8 x - \frac{1}{6} \sec^6 x + c.\end{aligned}$$

ج) اگر m زوج و n فرد باشد.

$$\int \sec^n x \cdot \tan^m x dx = \int \sec^n x \cdot (\tan^2 x)^{\frac{m}{2}} dx = \int \sec^n x (\sec^2 x - 1)^{\frac{m}{2}} dx$$

بعد از توان رساندن، انتگرال شامل توان $\sec$ می باشد که راه حل آن قبلاً گفته شده است.

انتگرال های به فرم $\int \sin^m x \cos^n x dx$

الف) حداقل یکی از m یا n فرد باشد. فرض کنید $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx = \int u^m (1 - u^2)^k du\end{aligned}$$

ب) m و n هر دو زوج باشند.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\cos^2 x)^k (\sin^2 x)^r dx$$

در ادامه از جانشانی $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ استفاده می شود.

انتگرال توابعی که بر حسب $\sin x$ و $\cos x$ می باشند.

$$\int F(\sin x, \cos x) dx$$

در این نوع انتگرال ها از تغییر متغیر $\tan \frac{x}{2} = t$ استفاده می شود.

$$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \tan^{-1} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int F(\sin x, \cos x) dx = \int F\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

بنابراین

مثال.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = -\int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt \\ &= -\int \frac{t^2+1-2}{t^2+1} dt = -\int dt + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -t + 2 \tan^{-1} t + c \\ &= -\tan \frac{x}{2} + 2 \tan^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

$$\int F(\sin^2 x, \cos^2 x) dx \quad \text{انتگرال توابعی که بر حسب } \sin^2 x \text{ و } \cos^2 x \text{ می باشند.}$$

برای حل این نوع انتگرال ها از تغییر متغیر $t = \tan x$ استفاده می شود.

$$\tan x = t \Rightarrow x = \tan^{-1} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{1}{2-\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + c.$$

جانشانی های مثلثاتی برای عبارات $x^2 - a^2$ و $a^2 - x^2$ و $a^2 + x^2$ $a > 0$

با جانشانی $x = a \sin t$ عبارت $a^2 - x^2$ به $a^2 \cos^2 t$ تبدیل می شود.

با جانشانی $x = a \sec t$ عبارت $x^2 - a^2$ به $a^2 \tan^2 t$ تبدیل می شود.

با جانشانی $x = a \tan t$ عبارت $a^2 + x^2$ به $a^2 \sec^2 t$ تبدیل می شود.

برای اینکه بتوانیم پس از حل انتگرال، مقدار اولیه را به جای t قرار دهیم، باید $\sin$ ، $\tan$ و $\sec$ معکوس پذیر باشند. بنابراین.

$$x = a \sin t \rightarrow t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \tan t \rightarrow t = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \sec t \rightarrow t = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} \geq 1 \rightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{a} \leq -1 \rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال مقابل.

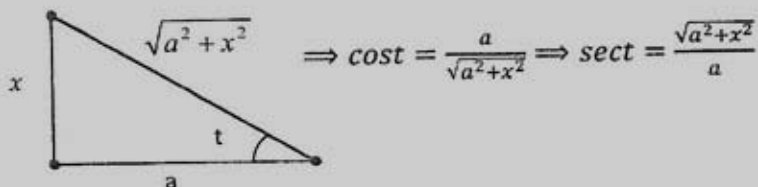
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad a > 0 \quad x = a \tan t \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \rightarrow dx = a \sec^2 t dt$$

$$= \int \frac{a \sec^2 t dt}{\sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2}} = \int \frac{a \sec^2 t dt}{|a \sec t|} = \int \sec t dt \quad (\sec > 0, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ به ازای})$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + c.$$

باتوجه به تغییر متغیر داده شده، مثلثی مانند روبرو به نام مثلث مرجع داریم که با استفاده از آن می توان

نسبت های به دست آمده در جواب را جایگزین کرد.

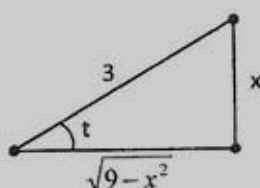


مثال.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} \quad x = 3\sin t \rightarrow dx = 3\cos t dt$$

$$= \int \frac{(9\sin^2 t)(3\cos t dt)}{3\cos t} = 9 \int \sin^2 t dt = 9 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + c$$

$$= \frac{9}{2} (t - \sin t \cos t) + c = \frac{9}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \right) + c.$$



$$\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

نکته. انتگرال های به فرم $\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ با تبدیلات فوق قابل حل هستند.

(*) انتگرال های شامل $ax^2 + bx + c$

به کمک مربع کامل کردن می توان سه جمله ای $ax^2 + bx + c$ را به صورت $a(u^2 \pm A^2)$ درآورد و سپس با استفاده از جانشانی های مثلثاتی آن را حل کرد.

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(u^2 \pm A^2)$$

مثال.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+1}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(u) + c = \sin^{-1}(x-1) + c \quad u = x-1 \rightarrow du = dx\end{aligned}$$

مثال.

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}} = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2(x^2-3x+\frac{9}{4})+4-\frac{18}{4}}} = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}} \quad (I)$$

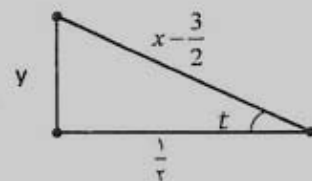
$$(x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \sec t \Rightarrow (x-3)^2 = \frac{1}{4} \sec^2 t, \quad x = \frac{1}{2} \sec t + \frac{3}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} (\sec t) \tan t dt$$

$$(I) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{2} \sec t + \frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} \sec^2 t - \frac{1}{4}}} (\frac{1}{2} \sec t) \tan t dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(\frac{1}{2} \sec t + \frac{5}{2})(\sec t)(\tan t)}{\frac{1}{2} \tan t} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int (\sec^2 t + 5 \sec t) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan t + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |\sec t + \tan t| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}| + c$$

$$y = \sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow \tan t = \frac{y}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}$$



$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \text{ انتگرال توابع کسری به فرم}$$

برای حل این نوع انتگرال ها ابتدا مشتق مخرج را به جای x صورت قرار می دهیم و سپس ضرایب را طوری در صورت کسر جدید اصلاح می کنیم که مساوی کسر اولی باشد.

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \int \underbrace{\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx}_{(I)} + (B - \frac{Ab}{2a}) \int \underbrace{\frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{(II)}$$

انتگرال (I) با متغیر $(t = \text{مخرج})$ به راحتی قابل حل است. انتگرال (II) نیز به روش گفته شده در (*) حل می شود.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (a > 0) \quad \text{انتگرال توابع کسری به شکل}$$

در این نوع انتگرال ها، از ضرب x^2 فاکتور می گیریم و از انتگرال بیرون می آوریم. بقیه راه حل مشابه انتگرال گفته شده در (*) است.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}$$

نکته: اگر a منفی باشد، از $-a$ فاکتور گرفته و از رادیکال بیرون می آوریم. بقیه راه حل مشابه بالاست.

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \quad \text{انتگرال توابع کسری به شکل}$$

مانند قبل، ابتدا سعی می کنیم مشتق $ax^2 + bx + c$ را در صورت به وجود آوریم و با تغییر ضرایب صورت کسر جدید را مساوی با صورت کسر اولی می کنیم. سپس انتگرال به دو انتگرال تبدیل می شود که حل آنها مشابه قسمت های قبل است.

نکته. در انتگرال گیری از توابع کسری، هرگاه درجه صورت از مخرج بیشتر باشد، صورت را به مخرج تقسیم می کنیم.

انتگرال گیری به کمک تجزیه کسرها

تجزیه کسر

برای تجزیه یک کسر به روش زیر عمل می کنیم.

ابتدا مخرج کسر را به عوامل تحویل ناپذیر، یعنی چندجمله ای های با کمترین درجه ممکن تجزیه می کنیم. سپس با توجه به نوع عوامل موجود در مخرج چند حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

۱. اگر مخرج کسر دارای چند عامل درجه اول باشد. یعنی کسری به صورت $\frac{F(x)}{(x+b_1)(x+b_2)\dots(x+b_n)}$ داریم.

در این حالت می نویسیم:

$$\frac{F(x)}{(x+b_1)(x+b_2)\dots(x+b_n)} = \frac{A_1}{x+b_1} + \frac{A_2}{x+b_2} + \dots + \frac{A_n}{x+b_n}$$

اکنون با هم مخرج کردن کسرهای سمت راست و مساوی قرار دادن کسر حاصل با کسر سمت چپ تساوی بالا، و دادن مقادیر متفاوت به x می توان اعداد A_1 تا A_n را به دست آورد.

مثال.

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

بنابراین چون مخرج دو کسر مساوی است باید صورت آنها نیز مساوی باشد. یعنی $2x+3 = A(x+2) + B(x-4)$

حال با دادن مقدار به x اعداد A و B به دست می آیند:

$$x = -2 \rightarrow 2(-2) + 3 = B(-2-4) \rightarrow -6B = -1 \rightarrow B = \frac{1}{6}$$

$$x = 4 \rightarrow 2(4) + 3 = A(4+2) \rightarrow 6A = 11 \rightarrow A = \frac{11}{6}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+2)} = \frac{\frac{11}{6}}{x-4} + \frac{\frac{1}{6}}{x+2}$$

نکته. در هنگام عددگذاری به جای x برای به دست آوردن A ، B بهتر است ریشه های مخرج را به جای x قرار دهیم.

۲. هرگاه مخرج کسر دارای عامل درجه اول با تکرار باشد. یعنی کسری به صورت

$$\frac{F(x)}{(x+b_1)^{m_1}(x+b_2)^{m_2}\dots(x+b_n)^{m_n}}$$

داریم. در این حالت برای هر یک از عامل ها به تعداد تکرار آن، کسر در سمت راست در نظر می گیریم. مثال بعد را ببینید.

مثال.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3} \\ &= \frac{A(x+1)^3 + B_1(x+1)^2(x-2) + B_2(x+1)(x-2) + B_3(x-2)}{(x+1)^3(x-2)}\end{aligned}$$

اکنون به جای x عدد قرار می دهیم و ضرایب A و B را محاسبه می کنیم. بهتر است ریشه های مخرج را قرار دهیم.

$$x=2 \Rightarrow A(3)^3=6 \rightarrow A=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

$$x=-1 \Rightarrow B_3(-3)=3 \rightarrow B_3=-1$$

$$x=0 \Rightarrow A-2B_1-2B_2-2B_3=2 \rightarrow -2(B_1+B_2)=2-\frac{2}{9}-2=-\frac{2}{9} \rightarrow B_1+B_2=\frac{1}{9}$$

$$x=1 \Rightarrow 8\left(\frac{2}{9}\right)-4B_1-2B_2+1=3 \rightarrow 2B_1+B_2=\frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} B_1+B_2=\frac{1}{9} \\ 2B_1+B_2=\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow B_1=0, B_2=\frac{1}{9}$$

۳. اگر مخرج کسر دارای یک عامل از درجه دو مانند (ax^2+bx+c) باشد، یعنی کسری به صورت

$$\frac{F(x)}{G(x)(ax^2+bx+c)}$$

داشته باشیم، آنگاه در تجزیه کسر، صورت را یک عامل درجه اول به شکل $Ax+B$ در نظر می گیریم. بقیه راه حل مشابه قبل است.

مثال. کسر $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ را تجزیه کنید.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} \Rightarrow x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1)$$

$$x=1 \rightarrow 2C=1 \rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$x=0 \rightarrow -B+C=0 \rightarrow B=C=\frac{1}{2}$$

$$x = -1 \rightarrow -2(B - A) + 2C = -1 \rightarrow -2\left(\frac{1}{2} - A\right) + 1 = -1 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

بنابراین

۴. هرگاه مخرج کسر دارای عامل درجه دومی با تکرار باشد یعنی مخرج دارای جمله ای مانند $(ax^2 + bx + c)^m$ باشد، آنگاه در تجزیه کسر متناظر با این عامل به تعداد تکرارها یعنی m تا کسر در نظر می گیریم. مثال بعد را ببینید.

مثال. کسر $\frac{2x-1}{(x-2)^2(2x^2+1)^2}$ را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{(x-2)^2(2x^2+1)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C_1x+D_1}{2x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{A(x-2)(2x^2+1)^2 + B(2x^2+1)^2 + (C_1x+D_1)(2x^2+1)(x-2)^2 + (C_2x+D_2)(x-2)^2}{(x-2)^2(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$2x - 1 =$$

بنابراین

$$A(x-2)(2x^2+1)^2 + B(2x^2+1)^2 + (C_1x+D_1)(2x^2+1)(x-2)^2 + (C_2x+D_2)(x-2)^2$$

اکنون با قرار دادن اعداد مختلف به جای x ، ضرایب مجهول را بدست می آوریم.

مثال. برای محاسبه انتگرال $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx$ ، ابتدا کسر انتگرالده را تجزیه می کنیم. این کسر در مثال های قبل

$$\text{تجزیه شده است و داریم} \quad \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \tan^{-1}x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c. \end{aligned}$$

نکته: اگر مخرج کسر به صورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه نشده باشد، باید آن را به صورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد.

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال $\int \frac{1}{x^3+1} dx$.

ابتدا مخرج کسر را به عوامل تحویل ناپذیر یعنی چندجمله ای های از کمترین درجه ممکن تجزیه می کنیم. با استفاده از اتحاد مجموع مکعبات داریم $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ دقت کنید که $x^2 - x + 1$ دارای ریشه حقیقی نیست و نمی توان آنرا به چند جمله ای های درجه اول تجزیه کرد. حال می توان کسر را تجزیه کرد.

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

بنابراین $A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = 1$

$$x = -1 \rightarrow 3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x = 0 \rightarrow A + C = 1 \rightarrow C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x = 1 \rightarrow A + 2B + 2C = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2-x+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} + \left(2 - \frac{1}{6}\right) \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{11}{6} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{11}{6} \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + c. \end{aligned}$$

مثال.
$$\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$$

برای حل این انتگرال باید کسر را تجزیه کنیم. برای تجزیه کسر، ابتدا باید چند جمله ای مخرج را به عوامل اول تجزیه کنیم. داریم

$$x = -1 \rightarrow (-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 0$$

بنابراین $x = -1$ یک ریشه مخرج است و در نتیجه $(x + 1)$ یک عامل از چندجمله ای مخرج می باشد. با تقسیم چند جمله ای مخرج یعنی $x^3 + x^2 + 4x + 4$ بر $(x + 1)$ عامل دیگر به صورت $(x^2 + 4)$ به دست می آید. توجه کنید که چون $x^2 + 4 = 0$ ریشه حقیقی ندارد، نمیتوان آنرا به عوامل درجه یک تجزیه کرد. بنابراین مخرج کسر به صورت مقابل تجزیه می شود.

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x + 1)(x^2 + 4)$$

اکنون برای تجزیه کسر می نویسیم

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+1} = \frac{(Ax+B)(x+1) + C(x^2+4)}{x^3+x^2+4x+4}$$

با قرار دادن مقادیر مختلف به x در تساوی بالا داریم

$$x = -1 \rightarrow 3(-1) - 7 = 5C \rightarrow C = -2$$

$$x = 0 \rightarrow -7 = B + 4C = B - 8 \rightarrow B = 1$$

$$x = 1 \rightarrow -4 = 2(A + B) + 5C = 2A + 2 - 10 \rightarrow A = 2$$

در نتیجه کسر انتگرالده به صورت زیر تجزیه می شود

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{x^2+4} - \frac{2}{x+1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx \\ &= \int \frac{2x+1}{x^2+4} dx - 2 \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{dx}{x^2+4} - 2 \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} - 2 \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

انتگرال توابع اصم

الف) انتگرال توابع بر حسب x و رادیکالهایی از x به صورت $\int F(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, x^{\frac{r_m}{s_m}}) dx$

در این نوع انتگرال ها فرض کنید k مخرج مشترک کسرهای $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_m}{s_m}$ باشد. در این صورت از تغییر متغیر $x = t^k$ استفاده می کنیم که انتگرال اصم را به انتگرال گویا تبدیل می کند.

مثال:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}+1}} dx & x = t^4 \quad (k=4) \Rightarrow dx &= 4t^3 dt \\ &= \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{(t^4)^{\frac{3}{4}+1}} 4t^3 dt = \int \frac{t^2}{t^3+1} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3+1} dt = 4 \left(\int t^2 dt - \int \frac{t^2}{t^3+1} dt \right) \\ &= \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln|t^3+1| + c = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3}+1| + c. \end{aligned}$$

ب) انتگرال توابع اصم به فرم $\int G\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_m}{s_m}}\right) dx$

فرض کنید k مخرج مشترک کسرهای $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_m}{s_m}$ باشد. در این صورت از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ استفاده می کنیم که انتگرال اصم را به انتگرال گویا تبدیل می کند.

مثال.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx & \quad x+4 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \\ &= \int \frac{t}{t^2-4} 2t dt = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-4} = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = 2t + 8 \left(\int \frac{\frac{1}{4}}{t-2} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{t+2} dt \right) \\ &= 2t + 2 \ln|t-2| - 2 \ln|t+2| + c = 2t + \ln \left(\frac{t-2}{t+2} \right)^2 + c \\ &= 2\sqrt{x+4} + \ln \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right)^2 + c. \end{aligned}$$

مثال.

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ انتگرال بالا را به یک انتگرال گویا تبدیل می کنیم.

$$\frac{1-x}{1+x} = t^2 \rightarrow t^2(1+x) = 1-x \rightarrow x(t^2+1) = 1-t^2 \rightarrow x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\frac{-2}{(1+x)^2} dx = 2t dt \rightarrow dx = -t(1+x)^2 dt = -t \left(1 + \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)^2 dt = \frac{-4t dt}{(t^2+1)^2}$$

بنابراین داریم

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2 t \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt = -4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt \quad (I)$$

برای حل انتگرال $\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt$ از تجزیه کسرها کمک میگیریم.

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{(1-t^2)^2} &= \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2} \\ &= \frac{A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2} \end{aligned}$$

$$t = 1 \rightarrow 4B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$t = -1 \rightarrow 4D = 1 \rightarrow D = \frac{1}{4}$$

$$t = 0 \rightarrow A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow A + C = -\frac{1}{2}$$

$$t = 2 \rightarrow -9A + \frac{9}{4} + 3C + \frac{1}{4} = 4 \rightarrow -9A + 3C = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4} \quad \& \quad A = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-t)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{4}}{(1+t)^2}$$

بنابراین

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 (I) &= -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1-t)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \ln|1-t| + \frac{1}{4} \frac{1}{1-t} - \frac{1}{4} \ln|1+t| - \frac{1}{4} \frac{1}{1+t}
 \end{aligned}$$

در پایان به جای t مقدار آن یعنی $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ را قرار می دهیم.

انتگرال دوجمله ای دیفرانسیلی $\int x^m (a + bx^n)^p dx$

برای حل اینگونه انتگرال ها، ابتدا سعی می کنیم توان n را به یک تبدیل کنیم. بنابراین از تبدیل $x = z^{\frac{1}{n}}$ استفاده می

$$x = z^{\frac{1}{n}} \rightarrow dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz \quad \text{کنیم. داریم}$$

$$\begin{aligned}
 \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int z^{\frac{m}{n}} (a + bz)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p dz \\
 &= \frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p dz
 \end{aligned}$$

حال اگر p, q هر دو صحیح باشند، جملات را به توان رسانده و انتگرال به راحتی حل می شود. اگر حداقل یکی از آنها گویا باشد، یکی از حالات زیر اتفاق می افتد.

حالت اول. اگر p صحیح (مثبت یا منفی) و q گویا ($q = \frac{r}{s}$) باشد. در اینصورت از تغییر متغیر $z = u^s$ استفاده می

$$z = u^s \rightarrow dz = su^{s-1} du \quad \text{کنیم. داریم}$$

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int u^r (a + bu^s)^p su^{s-1} du$$

بنابراین با توان رساندن جملات انتگرال حل می شود.

حالت دوم. اگر p گویا ($p = \frac{r}{s}$) و q صحیح باشد. در اینصورت از تغییر متغیر $a + bz = u^s$ استفاده می کنیم.

$$a + bz = u^s \rightarrow dz = \frac{s}{b} u^{s-1} du \quad \text{داریم}$$

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int \left(\frac{u^s - a}{b}\right)^q u^r \frac{s}{b} u^{s-1} du$$

دوباره انتگرال به یک انتگرال گویا تبدیل می شود که با توان رساندن جملات انتگرال حل می شود.

حالت سوم. هر گاه p و q هر دو گویا باشند اما $p + q$ صحیح باشد. فرض کنیم $p = \frac{r_1}{s_1}$ و $q = \frac{r_2}{s_2}$. در این

حالت انتگرال را در $\frac{z^p}{z^p}$ ضرب می کنیم.

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a + bz}{z}\right)^p dz$$

اکنون از تغییر متغیر $a + bz = u^{s_1}$ استفاده می کنیم.

نکته. اگر هیچ کدام از حالات فوق برقرار نباشد، انتگرال جواب ندارد.

مثال.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})} = \int x^{-\frac{2}{3}} (1+x^{\frac{2}{3}})^{-1} dx \quad \text{تغییر متغیر } x = z^{\frac{3}{2}} \rightarrow dx = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$$

$$= \frac{3}{2} \int z^{-1} (1+z)^{-1} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{3}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} (1+z)^{-1} dz$$

بنابراین حالت اول برقرار است. $p = -1$ و $q = -\frac{1}{2}$. در نتیجه از تغییر متغیر $z = u^2$ استفاده می کنیم.

داریم

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} (1+z)^{-1} dz \\ &= \frac{3}{2} \int u^{-1} (1+u^2)^{-1} 2u du = 3 \int \frac{du}{1+u^2} = 3 \tan^{-1} u + c \\ &= 3 \tan^{-1} \sqrt{z} + c = 3 \tan^{-1} \sqrt[3]{x} + c. \end{aligned}$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$= \int x^{-3} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$x = z^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$= \int z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{-2} (1+z)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (I)$$

حالت دوم برقرار است. از تغییر متغیر $1+z = u^2$ داریم. $dz = 2u du$ و $z = u^2 - 1$ پس

$$(I) = \frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^{-2} u^{-3} 2u du = \int \frac{dt}{(u^3 - u)^2}$$

انتگرال حاصل به روش تجزیه کسر قابل حل است. (حل کنید!)

مثال.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$= \int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$x = z^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$= \int z^{-1} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (I)$$

حالت سوم برقرار است. بنابراین انتگرالده را در $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ ضرب می کنیم. داریم

$$(I) = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} \frac{3}{2} \left(\frac{1+z}{z} \right)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (II)$$

اکنون از تغییر متغیر $\frac{1+z}{z} = u^2$ استفاده می کنیم. داریم

$$\frac{1+z}{z} = u^2 \rightarrow z = \frac{1}{u^2 - 1} \rightarrow dz = \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du$$

$$(II) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u^2 - 1} \right)^{-3} u^{-3} \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du = \int \frac{1 - u^2}{u^2} du = -\frac{1}{u} - u + c =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1+z}{z}}} - \sqrt{\frac{1+z}{z}} + c = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$