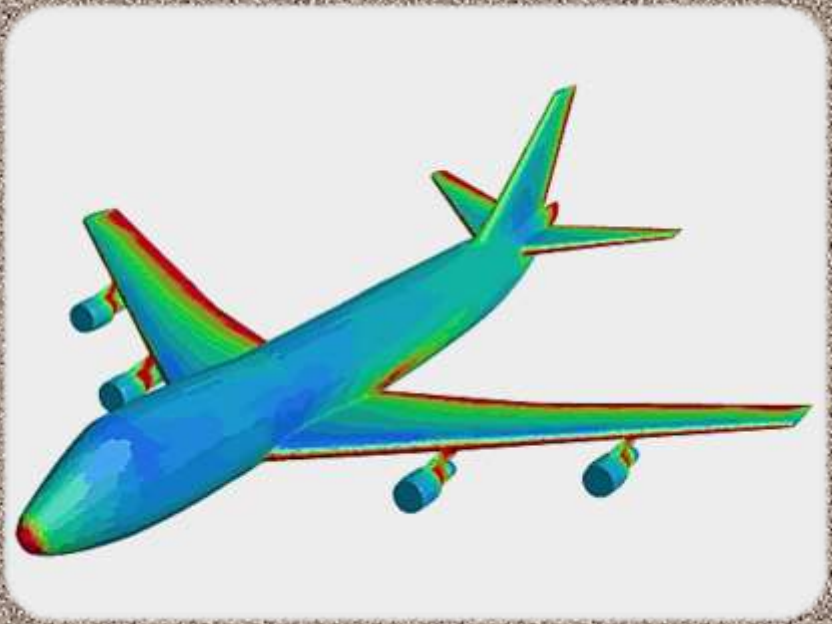


جزوه خلاصه درس روش اجزا محدود

Finite Element Method

www.jozve.org

بسم الله الرحمن الرحیم

امام محمد باقر (علیه السلام): زَكَاتُ الْعِلْمِ أَنْ تُعَلِّمَهُ عِبَادَ اللّهِ

زکات علم این است که آن را به بندگان خدا بیاموزی.

(اصول کافی، جلد ۱، صفحه ۵۱، روایت ۳)

این جزوه شامل جمع بندی و خلاصه‌ای از مباحث اجزاء محدود است؛ اما برای امتحان، صرفاً خواندن این جزوه کافی نیست و باید مطالب و مثال‌های حل شده در کلاس نیز مطالعه شوند.

فصل اول:

آشنایی کلی با درس اجزاء محدود

* اجزاء محدود چیست؟!

روش اجزاء محدود (*Finite Element Method - FEM*) روشی است که با استفاده از آن می‌توان بدون نیاز به تحلیل و محاسبات پیچیده و طرفاً با مقداری محاسبات ساده ریاضی، مسئله‌های استاتیک و مقاومت مصالح و... را حل کرده و جواب را به دست آورد. دانستن این نکته لازم است که پایه و اساس این روش، درس «محاسبات عددی» است. اما اصلاً این «محاسبات عددی» چیست؟ برای جواب به این سوال، باید به چند ترم قبل برگردیم. ما در ترم‌های قبل در درس‌هایی مثل «ریاضی عمومی ۱ و ۲» و همچنین «ریاضی مهندسی» یاد گرفتیم که چگونه مشتق و انتگرال و ... را با روش‌های معمولی حل کنیم.

در درس «محاسبات عددی» یاد گرفتیم که بدون استفاده از روش‌های معمولی و با استفاده از «روش‌های عددی» می‌توان «جواب یک انتگرال» یا ریشه یک «معادله درجه سه» را به دست آورد؛ آن هم فقط با تعدادی ضرب و تقسیم و محاسبات ساده‌ی ریاضی. اما این نکته را هم فهمیدیم که تنها مشکل «محاسبات عددی» این است که این محاسبات ساده‌ی ریاضی آنقدر طولانی هستند که زمان خیلی زیادی برای حل نیاز دارند. بنابراین متوجه شدیم که روش‌های «محاسبات عددی» را باید با «رایانه» و نرم افزارهایی مثل متلب و ... استفاده کرد؛ زیرا «محاسبات عددی» نیاز به تجزیه و تحلیل پیچیده ندارد و فقط «مقدار زیادی» محاسبات ساده‌ی ریاضی است.

تا اینجا مربوط به کاربرد «محاسبات عددی» در «رشته‌ی ریاضی» و دروس مربوط به آن بود. حالا از بحث ریاضی خارج شویم و ببینیم که محاسبات عددی در رشته‌های مهندسی چه کاربردی دارد؟

رشته‌ی «مهندسی مکانیک» به دو شاخه‌ی «سیالات» و «جامدات» تقسیم می‌شود. ما در درس‌های «ترمودینامیک» و «انتقال حرارت» و «مکانیک سیالات» و... با روش‌های معمولی حل مسئله‌های «سیالاتی» آشنا شدیم. همچنین در درس‌های «استاتیک» و «مقاومت مصالح» و «دینامیک» هم که مربوط به شاخه «جامدات» بودند، با روش‌های حل مسائل تنش و کرنش و... آشنا شدیم. اما نکته‌ای که وجود دارد این است که به غیر از آن روش‌های معمولی و سخت که نیاز به تجزیه و تحلیل دارند، روشی دیگر هم وجود دارد که می‌توان سخت‌ترین مسئله‌های «ترمودینامیک» و «انتقال حرارت» و «مقاومت مصالح» و «دینامیک» را بدون نیاز به تجزیه و تحلیل حل کرد؛ آن هم فقط با مقداری محاسبات ساده‌ی ریاضی. اسم این روش، «شبیه‌سازی» است.

در «رشته ریاضی» به این روش، «محاسبات عددی» می‌گویند. اما همین «محاسبات عددی» وقتی وارد رشته‌ی مکانیک می‌شود، اسمش تغییر می‌کند؛ در گرایش «سیالات» به آن «دینامیک سیالات محاسباتی یا CFD» گفته می‌شود و در گرایش «جامدات» به آن «روش اجزاء محدود یا FEM» می‌گویند. در همین درس اجزاء محدود می‌توان خرپاهای عجیب و غریب را بسیار ساده و فقط با محاسبات ساده ماتریسی تحلیل کرد.

البته اینجا هم مشکلی که هست، «حجم بالای محاسبات ریاضی» است که موجب شده است که از این روش فقط در رایانه‌ها و نرم افزارهای شبیه‌سازی استفاده شود.

در گرایش جامـدات و درس«اجـزاء محـدود» از نـرم افزارهـایی مثـل «آبـاکوس» و «انسیس» و... و در گرایش سیالات از نـرم افزارهایی مثـل «فلوئنـت» و «ای وی ال فایـر» و... بـــرای شبیه‌سازی رایانه‌ای استفاده می‌شود.

در این درس مبانی تئوری اجزاء محدود (که نرم افزارهایی مثل آباکوس و انسیس بر اساس آن کار می‌کنند) بررسی خواهد شد.

خوشـا هـر بـاغ را بـارانی از سـبز　　خوشا هـر دشـت را دامـانی از سـبز
بـرای هـر دریچـه، سـهمی از نـور　　لـب هـر پنجـره گلـدانی از سـبز

مبـادا آسـمان بـی‌بـال و بـی‌پـر　　مبـــادا در زمـــین دیـــوار بـــی‌در
مبـادا هـیچ سـقفی بـی‌پرسـتو　　مبـــادا هـــیچ بـــامی بـــی‌کبـــوتر

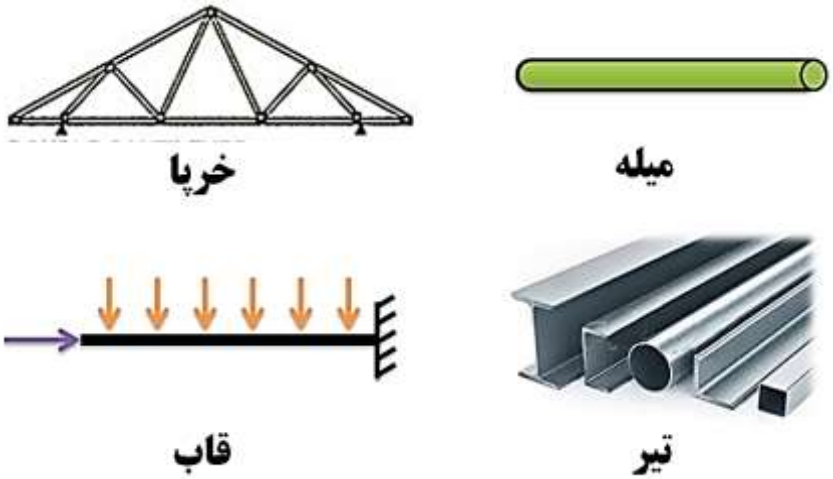
دکتر قیصر امین پور

فصل دوم:

انواع المان سازه‌ها در اجزاء محدود

* انواع المان سازه‌ها در اجزاء محدود

۱- میله ۲- خرپا ۳- تیر ۴- قاب



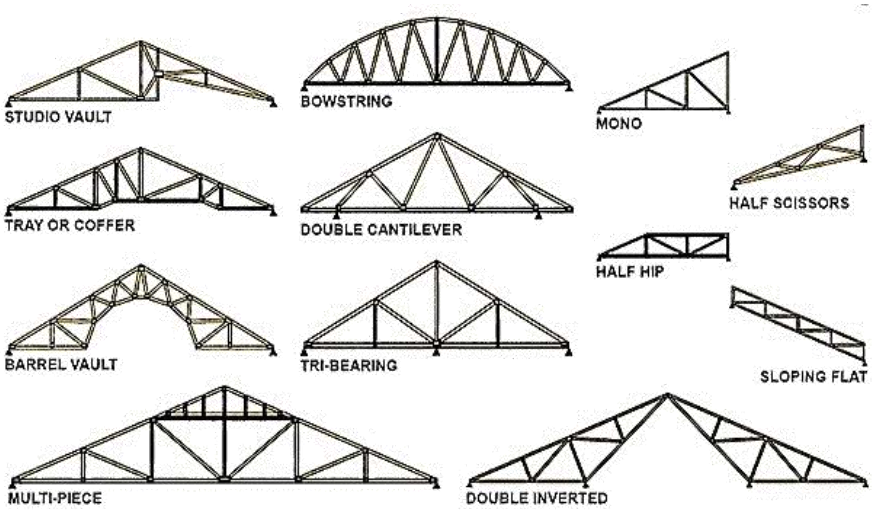
* المان میله

ساده‌ترین المان است و شبیه خرپا است امّا با این تفاوت که گره‌های میله، جابه‌جایی عمودی ندارند و ماتریس سختی آن ۲×۲ است:

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix}$$

گاهی برخی از المان‌های سازه، فنر هستند که نوعی میله محسوب می‌شوند.

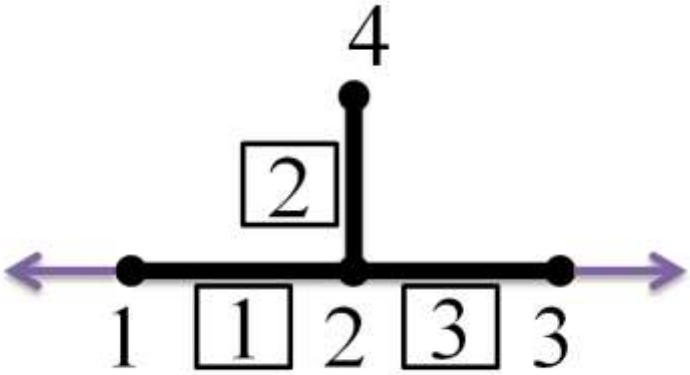
❊ المان خرپا



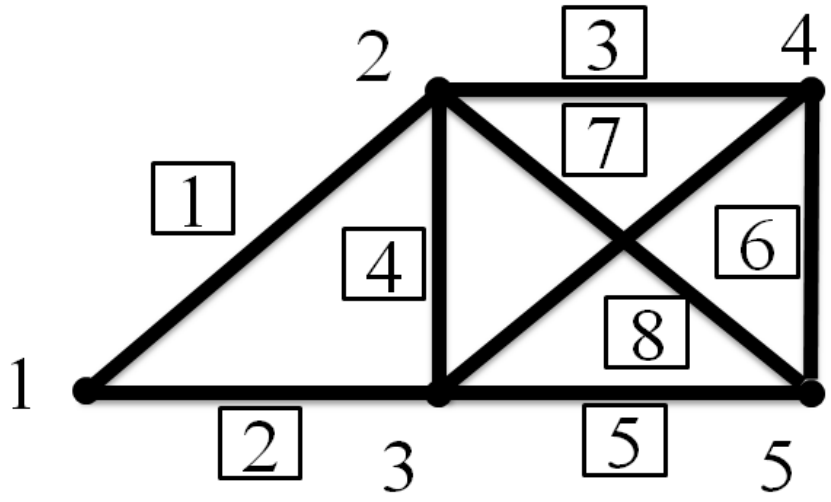
خرپا سازه‌ای است که عضوها (المان‌ها)ی آن «دو نیرویی» هستند و هیچ کدام از المان‌های خرپا، نیروی برشی یا گشتاور خمشی را تحمل نمی‌کند.

❊ در دو حالت زیر، به عضو خرپا «صفر نیرویی» گفته می‌شود:

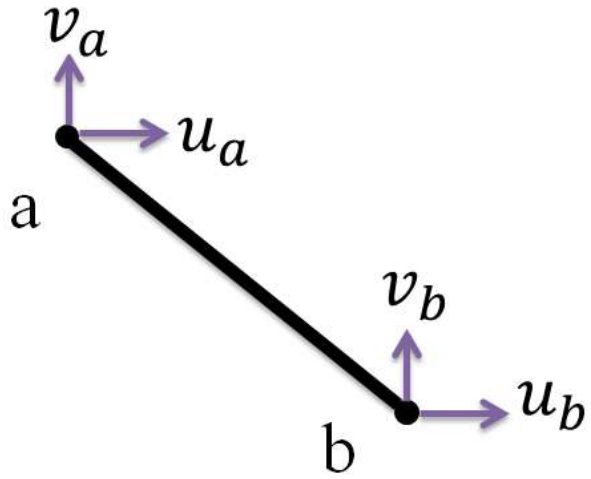
حالت اول: وقتی به گره 2 نیرو وارد نشود، به عضو $\boxed{2}$ «صفر نیرویی» گویند.



حالت دوم: عضو $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ «صفر نیرویی» هستند.



❊ هر گره از خرپا دارای دو درجه آزادی است؛ یکی جابه‌جایی در راستای x (که به آن u می‌گوییم) و دیگری جابه‌جایی در راستای y (که به آن v می‌گوییم).



❊ مراحل تحلیل اجزاء محدود خرپا

۱- تشکیل جدول‌های گسسته سازی (جدول مختصات گره‌ها و جدول مختصات المان‌ها)

۲- محاسبه ماتریس سختی:

$$[\mathrm{K}]^e = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

$$l = \frac{x_j - x_i}{L} \quad , \quad m = \frac{y_j - y_i}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

۳- مونتاژ ماتریس سختی

۴- محاسبه ماتریس نیرو: هر گره، دارای دو درجه آزادی و دو نیرو (یکی در جهت x و یکی در جهت y) است. پس ماتریس نیرو برای یک سازه با ۶ گره (m گره) به صورت ۱×۱۲ (۱×$۲m$) است.

۵- اِعمال شرایط مرزی: با توجه به صفر بودن جابه‌جایی بعضی از گره‌های خرپا، سطر و ستون متناظر با آن‌ها را در ماتریس سختیِ مونتاژ شده، برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله‌ی $\{\mathrm{F}\} = [\mathrm{k}]\{\mathrm{a}\}$ را حل کرده و جابه‌جایی‌های مجهول را به دست می‌آوریم.

۶- برای محاسبه‌ی نیروهای داخلی اعضای خرپا کافی است که ماتریس سختیِ هر المان را در جابه‌جایی گره‌های متناظر با آن، ضرب کنیم. با این کار، نیروهای داخلیِ المان به دست می‌آیند.

✓ معادله مشخصه یک المان خرپا:

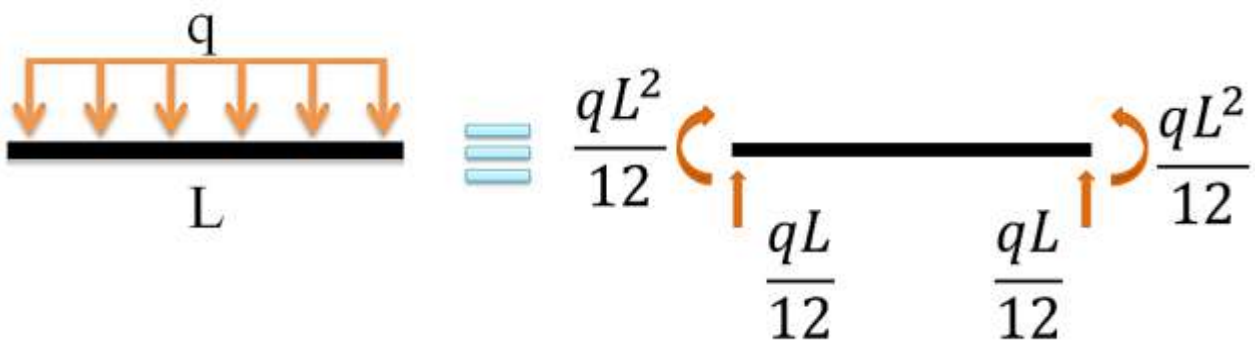
$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \end{bmatrix}$$

❊ المان تیر

المانی است که نیرویی در جهت محوری به آن وارد نمی‌شود. (اگر نیروی محوری وارد شود، به آن «ستون» گویند و اگر هر دو نیروی محوری و عرضی به آن وارد شود، به آن «تیر-ستون» می‌گویند)

هر گره‌ی تیر، دارای دو درجه آزادی است؛ یکی جابه‌جایی در راستای y (که به آن خیز(v) می‌گوییم) و دیگری شیب (θ) است.

در اجزاء محدود، فقط می‌توان بار نقطه‌ای یا گشتاور وارد کرد و نمی‌توان بار گسترده اِعمال نمود؛ برای رفع این مشکل از ساده‌سازی زیر استفاده می‌کنیم:



✓ماتریس سختی تیر:

$$[\mathrm{K}]^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

✓معادله مشخصه یک المان تیر:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

❊ المان قاب

از بین همه‌ی سازه‌هایی که تاکنون نام بردیم، قاب از همه کامل‌تر است و هر گره از المان قاب، دارای ۳ درجه آزادی است: θ , u , v.

ماتریس سختیِ قاب، ترکیبی از ماتریس سختیِ خرپا و تیر است:

$$[\mathrm{K}]^{e'} = \frac{E}{L^3}\begin{bmatrix} AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6IL & 0 & -12I & 6IL \\ 0 & 6IL & 4IL^2 & 0 & -6IL & 2IL^2 \\ -AL^2 & 0 & 0 & AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6IL & 0 & 12I & -6IL \\ 0 & 6IL & 2IL^2 & 0 & -6IL & 4IL^2 \end{bmatrix}$$

✓معادله مشخصه یک المان قاب:

$$\frac{E}{L^3}\begin{bmatrix} AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6IL & 0 & -12I & 6IL \\ 0 & 6IL & 4IL^2 & 0 & -6IL & 2IL^2 \\ -AL^2 & 0 & 0 & AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6IL & 0 & 12I & -6IL \\ 0 & 6IL & 2IL^2 & 0 & -6IL & 4IL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ M_1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختیِ یک المان قاب را باید در ماتریس تبدیل [T] ضرب کنیم:

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\theta & sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر توجه شود، برای قابی که افقی است (یعنی $\theta = 0$ است) ماتریس سختی قبل و بعد از ضرب کردن در ماتریس تبدیل، با هم یکسان هستند؛ امّا اگر $\theta \neq 0$ باشد، لازم است که برای مونتاژ ماتریس‌های سختی، آن‌ها را در ماتریس تبدیل ضرب کنیم که نتیجه‌ی آن، چنین خواهد بود:

$$[\mathrm{K}]^e = [\mathrm{T}]^T [\mathrm{K}]^{e'} [\mathrm{T}]$$

نکته: اگر در یک سازه، یکی از المان‌ها تیر و یکی قاب بود، برای مونتاژ ماتریس‌های سختی، باید ماتریس سختی تیر را هم به فرم ماتریس سختیِ قاب بنویسیم (چون ماتریس قاب از ماتریس تیر کامل‌تر است)

$$\begin{array}{c} v \quad \theta \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{تبدیل به ماتریس سختی قاب}} \begin{array}{c} u \quad v \quad \theta \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{array}$$

المان تیر **المان قاب**

❊ جمع‌بندی انواع المان سازه‌ها

(m تعداد گره‌ها است)

نوع المان	تعداد درجات آزادی هر گره	نام درجات آزادی هر گره	ماتریس سختی هر المان	ماتریس سختی مونتاژ شده	مثال	
					تعداد گره(m)	ماتریس سختی مونتاژ شده
میله	۱	u	۲×۲			
خرپا	۲	$u\ ,v$	۴×۴	۲m×۲m	۶	۱۲×۱۲
تیر	۲	$v\ ,\theta$	۴×۴	۲m×۲m	۶	۱۲×۱۲
قاب	۳	$u\ ,v\ ,\theta$	۶×۶	۳m×۳m	۳	۹×۹

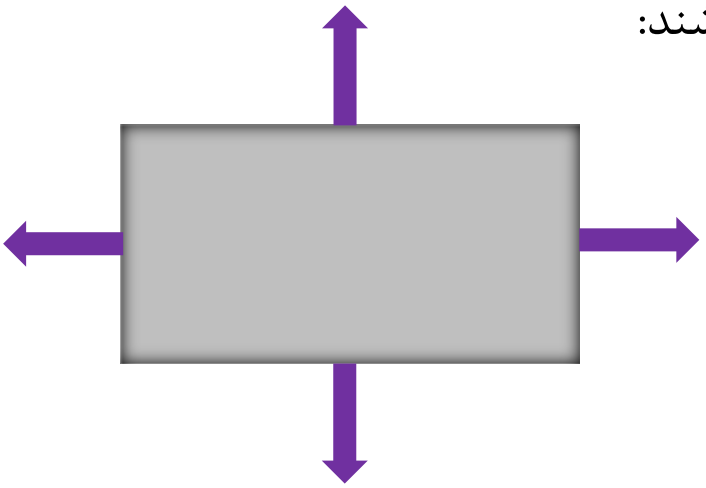
فصل سوم:

سازه‌های پیوسته

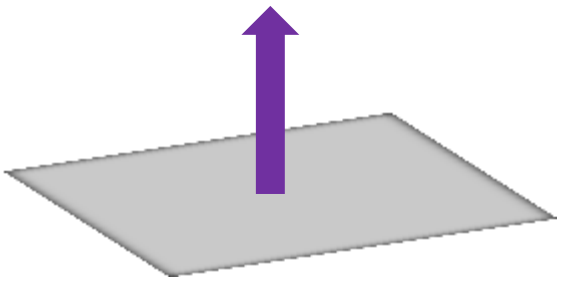
❊ تحلیل تنش صفحه‌ای

❊ برای سازه‌هایی مانند شکل زیر به کار می‌رود:

❊ در تحلیل تنش صفحه‌ای باید نیروها در صفحه قرار داشته باشند و خارج از صفحه (مثلاً عمود بر صفحه) نباشند؛ به عبارت دیگر، نیروها اینگونه باید باشند:



و اینگونه نباشند:



❋ در این فصل نیز مانند فصل قبل، رابطه‌ی زیر بین ماتریس نیرو {F} ، ماتریس سختی [k] و ماتریس تغییر مکان {a} وجود دارد:

$$\{F\} = [k]\{a\}$$

❋ ماتریس سختی [k] برای المانی به نام e از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$[k]^e = [B]^T[D][B]At$$

اکنون به شرح قسمت‌های مختلف این فرمول می‌پردازیم:

به ماتریس [D] ، ماتریس خواص می‌گویند و از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$[D] = \frac{E}{(1-\upsilon^2)}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix}$$

که در این فرمول، E مدول یانگ و υ ضریب پواسون است و معمـولاً در صورت سوال داده می‌شوند.

ماتریس [B] از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} m_{21} & 0 & m_{22} & 0 & m_{23} & 0 \\ 0 & m_{31} & 0 & m_{32} & 0 & m_{33} \\ m_{31} & m_{21} & m_{32} & m_{22} & m_{33} & m_{23} \end{bmatrix}$$

که m ها از فرمول های زیر به دست می‌آیند:

$$m_{21} = \frac{(y_j - y_k)}{2A}$$

$$m_{22} = \frac{(y_k - y_i)}{2A}$$

$$m_{23} = \frac{(y_i - y_j)}{2A}$$

$$m_{31} = \frac{(x_k - x_j)}{2A}$$

$$m_{32} = \frac{(x_i - x_k)}{2A}$$

$$m_{33} = \frac{(x_j - x_i)}{2A}$$

که A مساحت المان است.

ماتریس $[B]^T$ ترانهاده ماتریس $[B]$ است که از عوض کـردن جـای سطرها و ستون‌های ماتریس $[B]$ به دست می‌آید.

A مساحت المان است.

t ضخامت المان است.

* اکنون که قسمت‌های مختلـف فرمـول $[k]^e$ بیـان شـد، بـه بیـان فرمولی برای محاسبه ماتریس کرنش می‌پردازیم:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\}$$

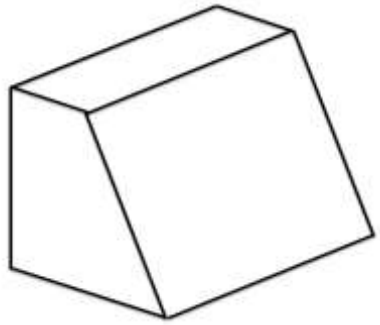
برای محاسبه ماتریس تنش نیز از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

****

* تحلیل کرنش صفحه‌ای

* برای سازه‌هایی مانند شکل زیر به کار می‌رود:



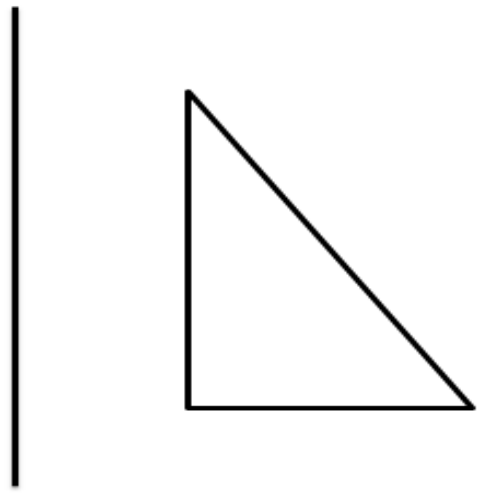
در تحلیل کرنش صفحه‌ای، ماتریس خواص [D] ، از فرمول زیـر بـه دست می‌آید:

$$[\mathrm{D}] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix}$$

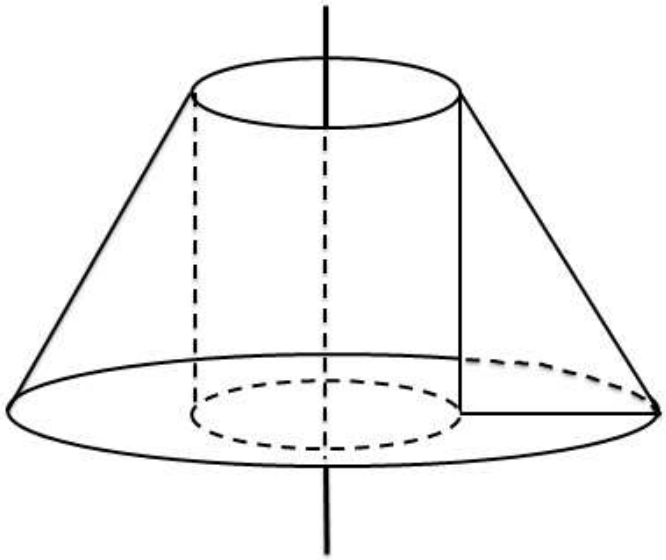
****

❊ تحلیل تقارن محوری

❊ به شکل زیر توجه کنید:



اگر این مثلث حول این خـط، یـک دوران ۳۶۰ درجـه انجـام بدهـد، شکل زیر حاصل می‌شود:



به چنین اجسامی که از دوران یک شکل حول یک «محور تقارن» ایجاد می‌شوند، اجسام تقارن محوری گفته می‌شود و برای تحلیل آن‌ها از «تحلیل تقارن محوری» استفاده می‌کنیم.

به شکلی که حول محور تقارن دوران می‌کند(که در مثال فوق مثلث است) اصطلاحاً «مولد» می‌گویند.

* ماتریس سختی $[\mathrm{k}]$ برای تحلیل تقارن محوری از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$[\mathrm{k}] = 2\pi r_c A[\overline{\mathrm{B}}]^T[\mathrm{D}][\overline{\mathrm{B}}]$$

در تحلیل تقارن محوری، ماتریس خواص $[\mathrm{D}]$ ، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$[\mathrm{D}] = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & \upsilon & 0 \\ \upsilon & \upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس $[\overline{\mathrm{B}}]$ نیز به صورت زیر است:

$$[\overline{\mathrm{B}}] = \begin{bmatrix} m_{21} & 0 & m_{22} & 0 & m_{23} & 0 \\ \overline{N}_i/r_c & 0 & \overline{N}_j/r_c & 0 & \overline{N}_k/r_c & 0 \\ 0 & m_{11} & 0 & m_{22} & 0 & m_{33} \\ m_{31} & m_{21} & m_{32} & m_{22} & m_{33} & m_{23} \end{bmatrix}$$

که مقادیر $\overline{N}_i$ و $\overline{N}_j$ و $\overline{N}_k$ از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

$$\overline{N}_i = m_{11} + m_{21}r_c + m_{31}z_c$$

$$\overline{N}_j = m_{12} + m_{22}r_c + m_{32}z_c$$

$$\overline{N}_k = m_{13} + m_{23}r_c + m_{33}z_c$$

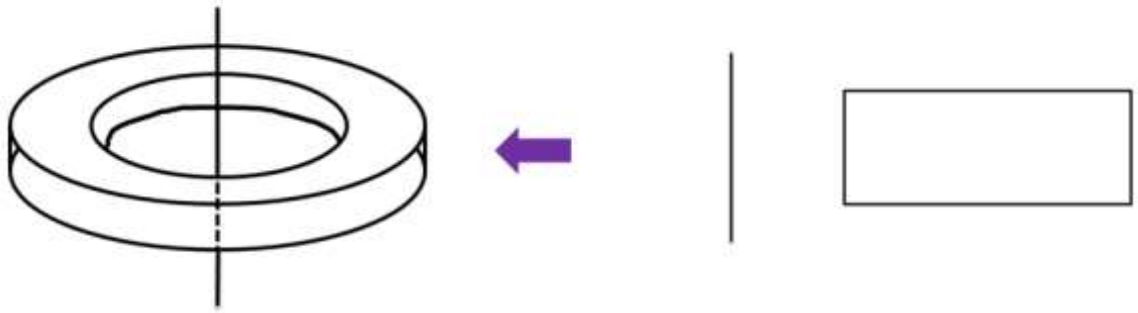
که m_{11} و m_{12} و m_{13} نیز از روابط زیر به دست می‌آید:

$$m_{11} = \frac{(x_j y_k - x_k y_j)}{2A}$$

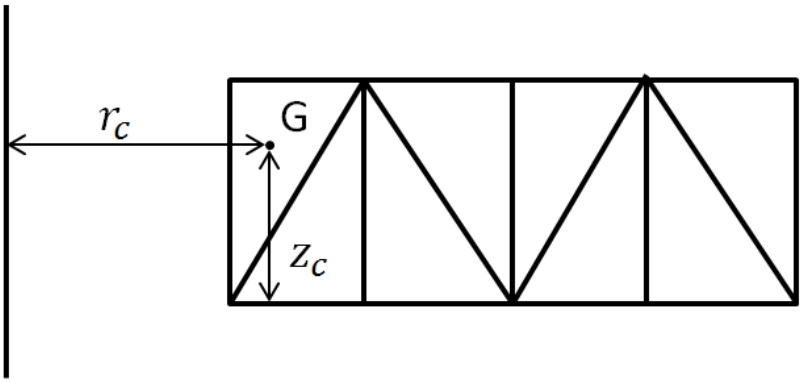
$$m_{12} = \frac{(x_k y_i - x_i y_k)}{2A}$$

$$m_{13} = \frac{(x_i y_j - x_j y_i)}{2A}$$

برای دانستن اینکه r_c و z_c در فرمول‌های بالا چه هستند، بـه شـکل زیر توجه شود:

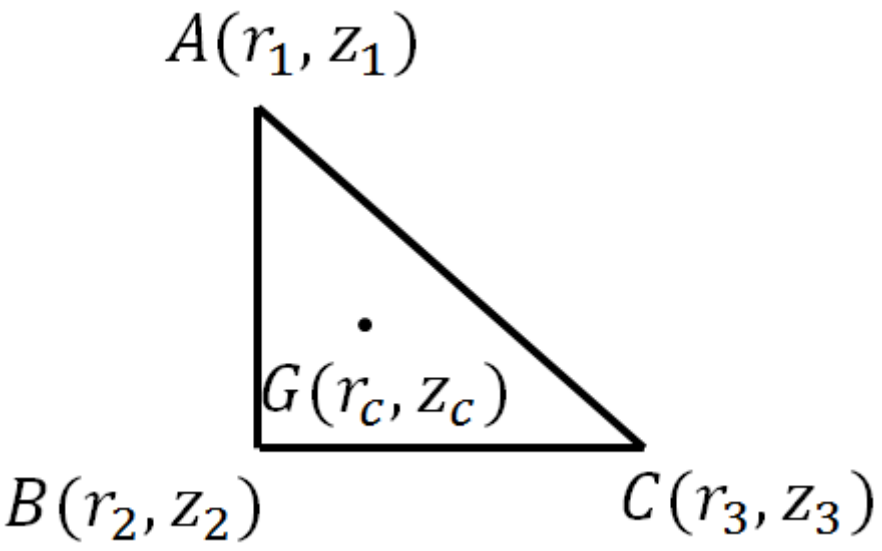


در شکل بالا، یک مستطیل را به عنوان «مولد» داریم که حول محور تقارن دوران می‌کند و جسم فوق را ایجاد می‌کنـد. اگـر مسـتطیل را المان‌بندی کنیم، به شکل زیر در می‌آید:



طبق شکل بالا r_c و z_c مختصات نقطـه‌ی مرکـز ثقـلِ المـانِ مثلثـی شکل هستند.(توجه شود که مبدا مختصات روی محـور تقـارن قـرار دارد.)

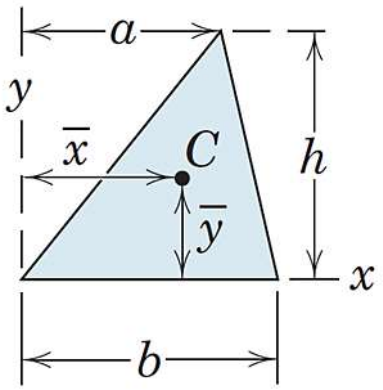
نکته ۱: اگر مختصات سه راسِ یک مثلث را داشته باشیم، آنگاه می‌توان مختصات مرکز ثقل را اینگونه به دست آورد:



$$r_c = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

$$z_c = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

نکته ۲: اگر اندازه قاعده و ارتفاع یک مثلث را داشته باشیم، آنگاه می‌توان مختصات مرکز ثقل را اینگونه به دست آورد:



$$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$

درباره نکته بالا توجه شود که اگـر مثلـث قـائم الزاویـه باشـد، آنگـاه $a = 0$ خواهد بود و بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{b}{3} \qquad , \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

* برای محاسبه ماتریس کرنش یـک المـان از فرمـول زیـر اسـتفاده شود:

$$\{\varepsilon\} = [\mathrm{B}]\{a\}$$

* برای محاسبه ماتریس تنش یک المان از فرمول زیر استفاده شود:

$$\{\sigma\} = [\mathrm{D}]\{\varepsilon\}$$

****

*** مقایسه بین مرتبه ماتریس‌های تنش صفحه‌ای و تقارن محوری**

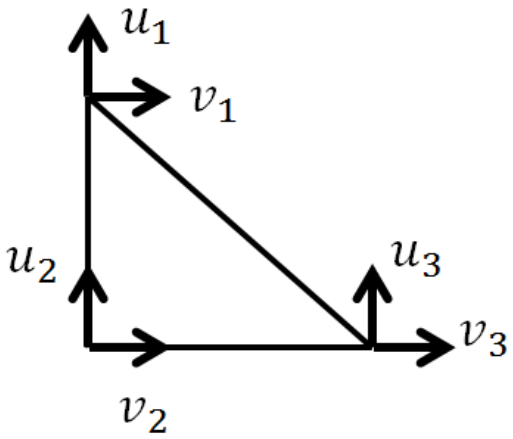
* در تنش صفحه‌ای:

$[\mathrm{B}]_{3\times6}$ $\qquad$ $[\mathrm{D}]_{3\times3}$ $\qquad$ $[\mathrm{B}]^{T}{}_{6\times3}$

* در تقارن محوری:

$[\overline{\mathrm{B}}]_{4\times6}$ $\qquad$ $[\mathrm{D}]_{4\times4}$ $\qquad$ $[\overline{\mathrm{B}}]^{T}{}_{6\times4}$

* همچنین ماتریس $\{a\}$ که ماتریس تغییر مکان است، برای یک المان مثلثی به صورت $\{a\}_{6\times1}$ است؛ زیرا هر گره دارای دو درجه آزادی است.



بنابراین مرتبه ماتریس‌های تنش و کرنش برای تحلیل تنش صفحه‌ای به صورت زیر است:

$$\{\varepsilon\}_{3\times1} = [\mathrm{B}]_{3\times6}\{a\}_{6\times1}$$

$$\{\sigma\}_{3\times1} = [\mathrm{D}]_{3\times3}\{\varepsilon\}_{3\times1}$$

همچنین مرتبه ماتریس‌های تنش و کرنش برای تحلیل تقارن محوری به صورت زیر خواهد بود:

$$\{\varepsilon\}_{4\times1} = [\overline{\mathrm{B}}]_{4\times6}\{a\}_{6\times1}$$

$$\{\sigma\}_{4\times1} = [\mathrm{D}]_{4\times4}\{\varepsilon\}_{4\times1}$$

*** جمع بندی**

۱) در تحلیل‌های این فصل نیز مانند فصل‌های قبل، از رابطه‌ی $\{F\} = [k]\{a\}$ استفاده می‌کنیم.

۲) ابتدا جداول گسسته سازی (یعنی جدول مختصات گره‌ها و جدول مختصات المان‌ها) را تشکیل می‌دهیم.

۳) سپس از فرمول $[k]^e$ ماتریس سختی را برای هر کدام از المان‌ها به دست می‌آوریم.

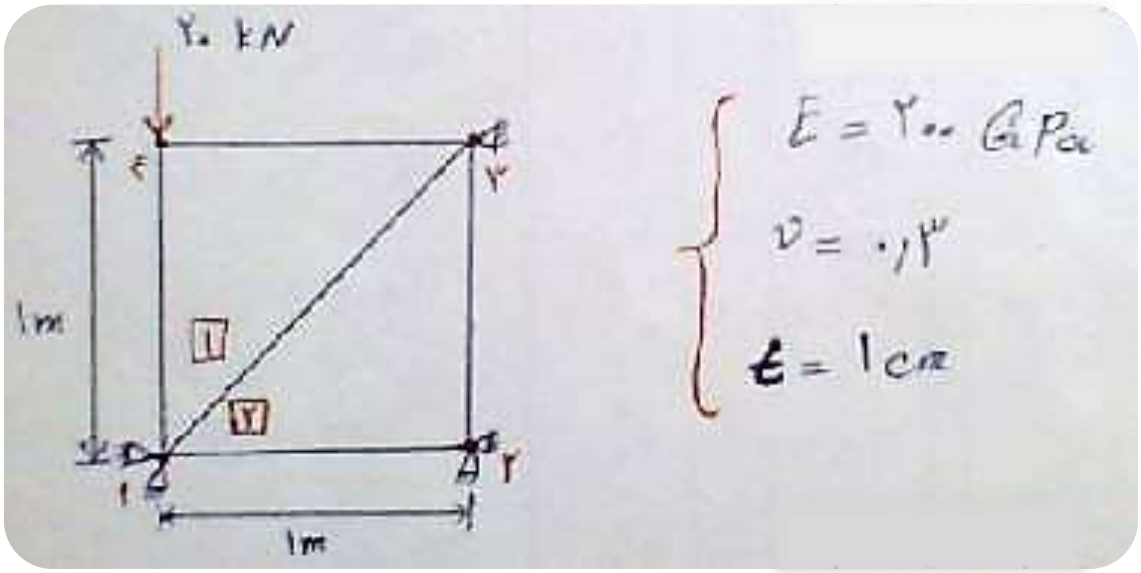
۴) سپس ماتریس‌های $[k]^e$ را با هم مونتاژ می‌کنیم تا ماتریس کلی $[k]$ به دست آید.

۵) اکنون ماتریس تغییر مکان گره‌ها یعنی $\{a\}$ و ماتریس نیرو یعنی $\{F\}$ را با توجه به شکل مسئله می‌نویسیم و در فرمول $\{F\} = [k]\{a\}$ قرار می‌دهیم.

۶) با توجه به شکل مسئله می‌بینیم که جابه‌جایی بعضی از گره‌ها برابر صفر است؛ بنابراین در رابطه‌ی $\{F\} = [k]\{a\}$ ، تمام سطر و ستون‌های متناظر با این جابه‌جایی‌ها را حذف می‌کنیم تا ماتریس ساده‌تر شود.

۷) حالا معادله‌ی ماتریسی را به یک دستگاه چند معادله و چند مجهول تبدیل می‌کنیم و مجهولات مورد نظر را به دست می‌آوریم.

مثال: جابه‌جایی گره‌ها را در سازه‌ی زیر بیابید.



جدول مختصات المان‌ها:

شماره المان	۱	۲
i	۱	۱
j	۳	۲
k	۴	۳

جدول مختصات گره‌ها:

شماره گره	۱	۲	۳	۴
x	۰	۱	۱	۰
y	۰	۰	۱	۱

مساحت المان‌ها:

$$A = \frac{۱ \times ۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

ماتریس خواص تنش صفحه‌ای:

$$[D] = \frac{E}{۱-\nu^۲}\begin{bmatrix} ۱ & \nu & ۰ \\ \nu & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{(۱-\nu)}{۲} \end{bmatrix} = ۱۰^{۷}\begin{bmatrix} ۲۱۹۷۸ & ۶۵۹۳ & ۰ \\ ۶۵۹۳ & ۲۱۹۷۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷۶۹۲ \end{bmatrix}$$

برای المان ۱:

$$m_{۲۱} = \frac{(y_j - y_k)}{۲A} = \frac{۱-۱}{۲\times\frac{۱}{۲}} = ۰ \quad , \quad m_{۳۱} = \frac{(x_k - x_j)}{۲A} = \frac{۰-۱}{۱} = -۱$$

$$m_{۱۲} = \frac{(y_k - y_i)}{۲A} = \frac{۱-۰}{۱} = ۱ \quad , \quad m_{۳۲} = \frac{(x_i - x_k)}{۲A} = \frac{۰-۰}{۱} = ۰$$

$$m_{۱۳} = \frac{(y_i - y_j)}{۲A} = \frac{۰-۱}{۱} = -۱ \quad , \quad m_{۳۳} = \frac{(x_j - x_i)}{۲A} = \frac{۱-۰}{۱} = ۱$$

$$[B] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow k' = B^T D B A t =$$

$$۱۰^{۷}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & ۲_{۱۱} & & ۲_{۱۲} & & ۲_{۱۳} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} ۳۸ & ۰ & ۰ & -۳۸ & -۳۸ & -۳۸ \\ ۰ & ۱۱۰ & -۳۳ & ۰ & ۳۳ & -۱۱۰ \\ \hline ۰ & -۳۳ & ۱۱۰ & ۰ & -۱۱۰ & ۳۳ \\ -۳۸ & ۰ & ۰ & ۳۸ & ۳۸ & -۳۸ \\ \hline -۳۸ & ۳۳ & -۱۱۰ & ۳۸ & ۱۴۸ & -۷۱ \\ ۳۸ & -۱۱۰ & ۳۳ & -۳۸ & -۷۱ & ۱۴۸ \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} & k_{۲۱} & & k_{۲۲} & & k_{۲۳} \end{array} \end{array}$$

برای المان ۲:

$$m_{21} = \frac{0-1}{1} = -1 \quad , \quad m_{31} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$m_{22} = \frac{1-0}{1} = 1 \quad , \quad m_{32} = \frac{0-1}{1} = -1$$

$$m_{23} = \frac{0-0}{1} = 0 \quad , \quad m_{33} = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k^{e} = B^{T} D B A t =$$

برای المان ۷:

$$10^{7} \begin{bmatrix} \overset{k_{11}}{110} & 0 & \overset{k_{12}}{-110} & 33 & \overset{k_{13}}{0} & -33 \\ 0 & 38 & 38 & -38 & -38 & 0 \\ -110 & 38 & 148 & -71 & -38 & 33 \\ 33 & \overset{k_{21}}{-38} & -71 & \overset{k_{22}}{148} & 38 & \overset{k_{23}}{-110} \\ 0 & -38 & -38 & 38 & 38 & 0 \\ -33 & 0 & 33 & -110 & 0 & 110 \end{bmatrix}$$

$$k_{11} \qquad k_{22} \qquad k_{33}$$

با اِعمال شرایط مرزی زیر، معادله ساده‌تر می‌شود:

$$u_1 = v_1 = 0 \quad \text{و} \quad u_2 = v_2 = 0 \quad \text{و} \quad u_3 = 0$$

$$
10^{7}\begin{bmatrix}
\Sigma k_{11} & k_{12} & \Sigma k_{13} & k_{14} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\
\Sigma k_{31} & k_{32} & \Sigma k_{33} & k_{34} \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \\ F_x^3 \\ F_y^3 \\ F_x^4 \\ F_y^4
\end{bmatrix}
$$

معادله‌ی ساده شده:

$$
10^{7}\begin{bmatrix}
148 & 48 & -38 \\
48 & 148 & -71 \\
-38 & -71 & 148
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_3 \\ u_4 \\ v_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_y^3 \\ F_x^4 \\ F_y^4
\end{bmatrix}
$$

و از طرفی:

$$F_y^3 = 0 \quad , \quad F_x^4 = 0$$

$$F_y^4 = -20000\ N$$

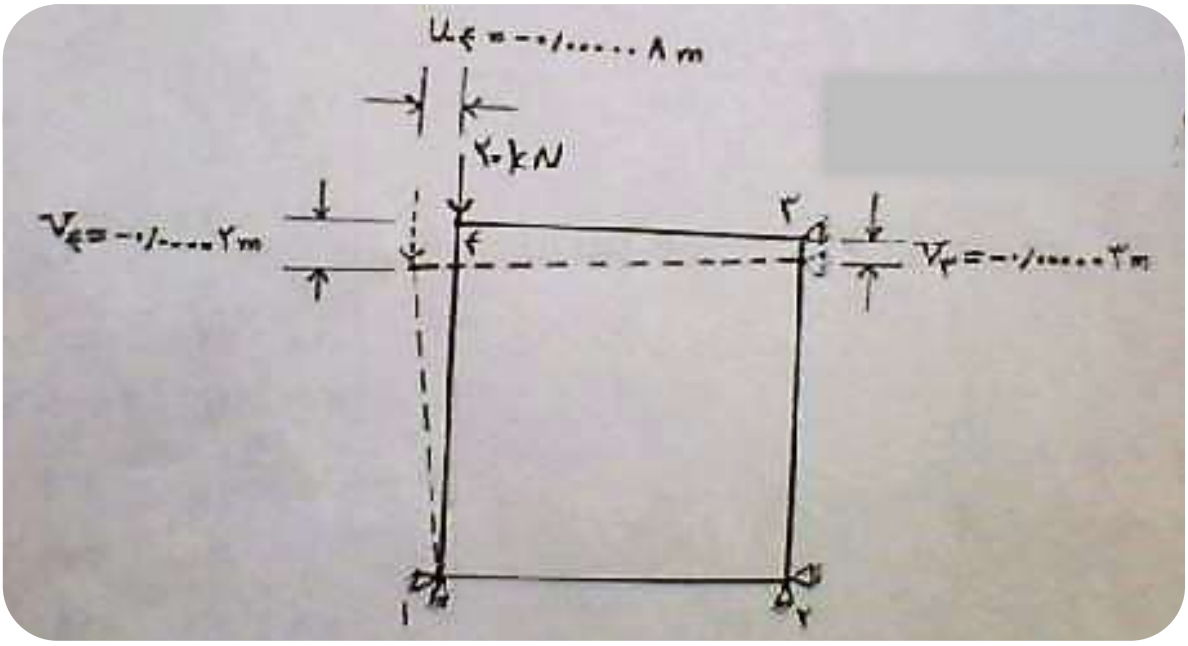
$$\begin{cases} ۱۴۸\, v_۳ + ۳۸\, u_۴ - ۳۸\, v_۴ = ۰ \\ ۳۸\, v_۳ + ۱۴۸\, u_۴ - ۷۱\, v_۴ = ۰ \\ -۳۸\, v_۳ - ۷۱\, u_۴ + ۱۴۸\, v_۴ = -۰/۰۰۲ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -۲۰۴۶۰\, u_۴ + ۹۰۲۴\, v_۴ = ۰$$

$$\Rightarrow u_۴ + v_۴ = -۰/۰۰۰۰۲۶$$

$$\Rightarrow \boxed{v_۴ = -۰/۰۰۰۰۲\,m} \quad \boxed{u_۴ = -۰/۰۰۰۰۰۸\,m} \quad \boxed{v_۳ = -۰/۰۰۰۰۰۳\,m}$$

بنابراین جابه‌جایی گره‌ها به صورت زیر خواهد بود:



فصل چهارم:

المان‌ها و توابع شکل

*** المان‌ها انواع مختلفی دارند:**

۱) المان‌های یک بُعدی

۲) المان‌های دو بُعدی

۳) المان‌های سه بُعدی

*** المان‌های یک بُعدی، خودشان چندین نوع هستند:**

۱) المان‌های یک بُعدیِ دو گره‌ای (مرتبه۱)

۲) المان‌های یک بُعدیِ سه گره‌ای (مرتبه۲)

۳) المان‌های یک بُعدیِ چهار گره‌ای (مرتبه۳)

۴) المان‌های یک بُعدیِ پنج گره‌ای (مرتبه۴)

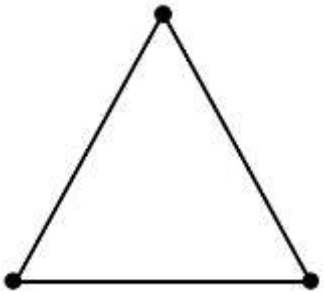
*** المان‌های دوبُعدی، به دو نوع تقسیم می‌شوند:**

الف) المان‌های دوبُعدی مثلثی

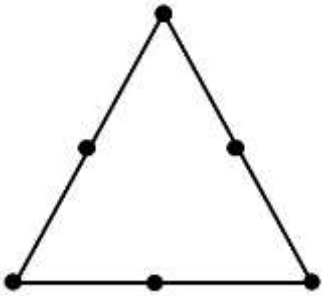
ب) المان‌های دوبُعدی مربعی

*** انواع المان‌های دوبُعدی مثلثی:**

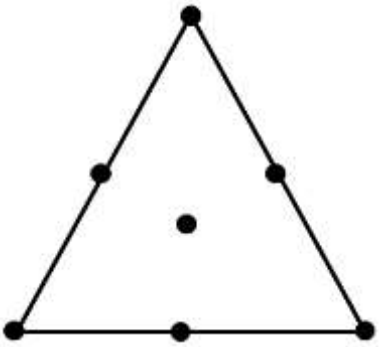
المان مثلثی مرتبه۱



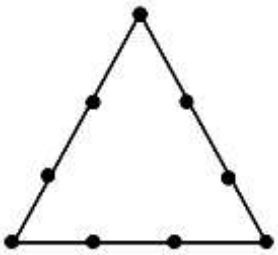
المان مثلثی مرتبه۲ سرندیپیتی



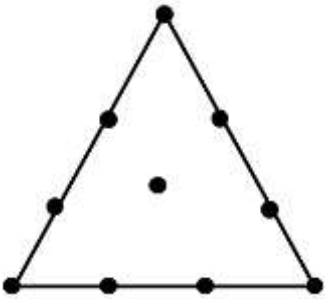
المان مثلثی مرتبه۲ لاگرانژی



المان مثلثی مرتبه۳ سرندیپیتی

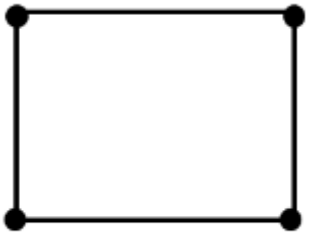


المان مثلثی مرتبه۳ لاگرانژی

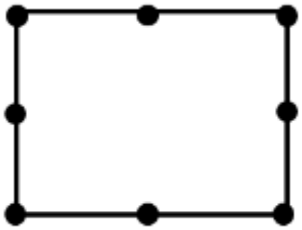


❊ انواع المان‌های دوبُعدی مربعی:

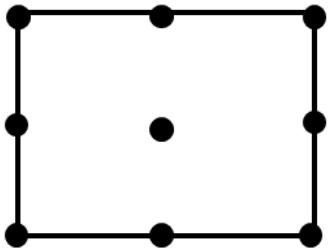
المان مربعی مرتبه۱



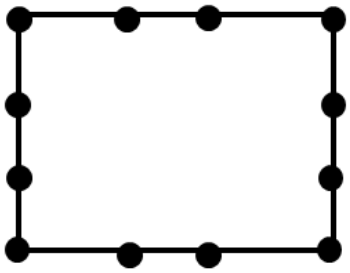
المان مربعی مرتبه۲ سرندیپیتی



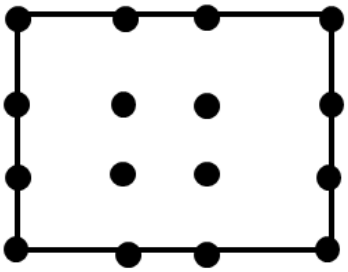
المان مربعی مرتبه۲ لاگرانژی



المان مربعی مرتبه۳ سرندیپیتی



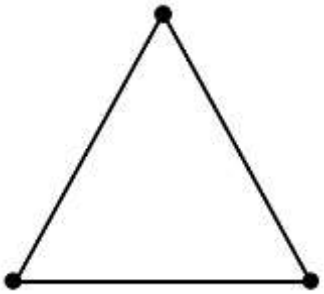
المان مربعی مرتبه۳ لاگرانژی



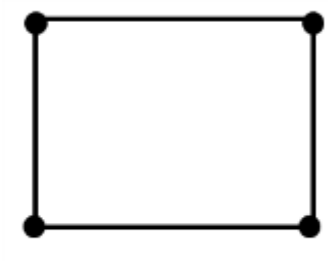
سوال۱: مرتبه المان یعنی چه؟

جواب: همیشه به ساده‌ترین نوع المان‌ها، مرتبه۱ گفته می‌شود؛ مثلاً برای المان‌های یک بُعدی، المانِ مرتبه۱ به صورت زیر است:

و برای المان‌های دو بُعدیِ مثلثی، المانِ مرتبه۱ به صورت زیر است:



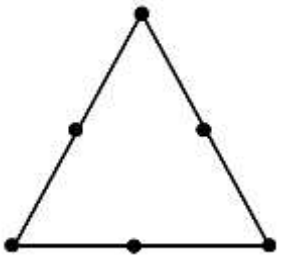
و برای المان‌های دو بُعدیِ مربعی، المانِ مرتبه۱ به صورت زیر است:



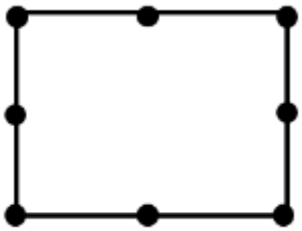
المانِ مرتبه۲ نیز به همین ترتیب است:

برای حالت یک بُعدی:

برای حالت دو بُعدیِ مثلثی:



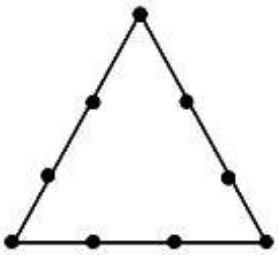
برای حالت دو بُعدیِ مربعی:



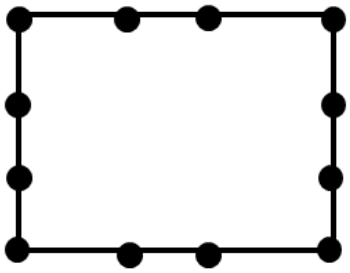
المانِ مرتبه۳ نیز به صورت زیر:

برای حالت یک بُعدی:

برای حالت دو بُعدیِ مثلثی:



برای حالت دو بُعدیِ مربعی:



سوال۲: المان لاگرانژی یعنی چه؟

جواب: اگر بتوانیم با استفاده از روش لاگرانژ برای یک المـان، «تـابع شکل» بنویسیم، به آن المان لاگرانژی می‌گویند.

سوال۳: المان سرندیپیتی یعنی چه؟

جواب: اگر فقط اضلاع المان دارای گره باشند و در داخل المان هـچ گره‌ای وجود نداشته باشد، به آن المان سرندیپیتی می‌گویند.

❊ اکنون که انواع مختلف المان‌ها مشخص شد، پارامتری به نام «چندجمله‌ای لاگرانژ» برای هر المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

در این فرمول علامت Π شبیه به همان Σ است با این تفاوت که Σ برای جمع است، اما Π برای ضرب به کار می‌رود.

❊ حالا با یک مثال ساده، چندجمله‌ای لاگرانژ را برای یک المان یک‌بُعدیِ دوگره‌ای به دست می‌آوریم:

طبق شکل، دو گره‌ی ابتدا و انتها را به ترتیب ۱- و ۱+ می‌نامیم.

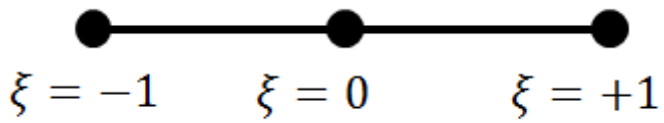
طبق فرمول لاگرانژ برای $j = 1$:

$$N_1(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_1 - x_i)} = \frac{(x - x_2)}{\underbrace{(x_1 - x_2)}_{i=2}} = \frac{(x - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{1}{2}(1 - x)$$

و همچنین برای $j = 2$:

$$N_2(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_2 - x_i)} = \frac{(x - x_1)}{\underbrace{(x_2 - x_1)}_{i=1}} = \frac{(x+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+x)$$

مثال بعد: چند جمله‌ای لاگرانژ برای المان یک بُعدیِ سه گره‌ای



طبق شکل، دو گره ابتدا و انتها را به ترتیب ۱- و ۱+ می‌نامیم و گره وسط را صفر نامگذاری می‌کنیم.

طبق فرمول لاگرانژ برای $j = 1$:

$$N_1(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{3} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_1 - \xi_i)} = \frac{(\xi - \xi_2)}{\underbrace{(\xi_1 - \xi_2)}_{i=2}} \times \frac{(\xi - \xi_3)}{\underbrace{(\xi_1 - \xi_3)}_{i=3}} = \frac{\xi}{-1}\frac{\xi - 1}{-1-1} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

توجه شود که چون $\mathrm{j} = 1$ بود، برای اینکه $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$ برقرار باشد، برای $\mathrm{i} = 1$ مقداری در نظر نگرفتیم.

و همچنین برای $j = 2$:

$$N_2(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{3} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_2 - \xi_i)} = \frac{(\xi - \xi_1)}{\underbrace{(\xi_2 - \xi_1)}_{i=1}} \times \frac{(\xi - \xi_3)}{\underbrace{(\xi_2 - \xi_3)}_{i=3}} = \frac{\xi - (-1)}{0 - (-1)}\frac{\xi - 1}{\xi} = 1 - \xi^2$$

در اینجا نیز، چون $j = 2$ بود، بـرای اینکـه $j \neq i$ برقـرار باشـد، برای $i = 2$ مقداری در نظر نگرفتیم.

اکنون برای $j = 3$:

$$N_3(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{3} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_3 - \xi_i)} = \underbrace{\frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_3 - \xi_1)}}_{i=1} \times \underbrace{\frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_2)}}_{i=2} = \frac{\xi + 1}{2}\frac{\xi}{1} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

و در اینجا نیز، چون $j = 3$ بود، برای اینکـه $j \neq i$ برقـرار باشـد، برای $i = 3$ مقداری در نظر نگرفتیم.

بنابراین چند جمله‌ای‌های لاگرانژ برای این مثال به دست آمد:

$$N_1(x) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$N_2(x) = 1 - \xi^2$$

$$N_3(x) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

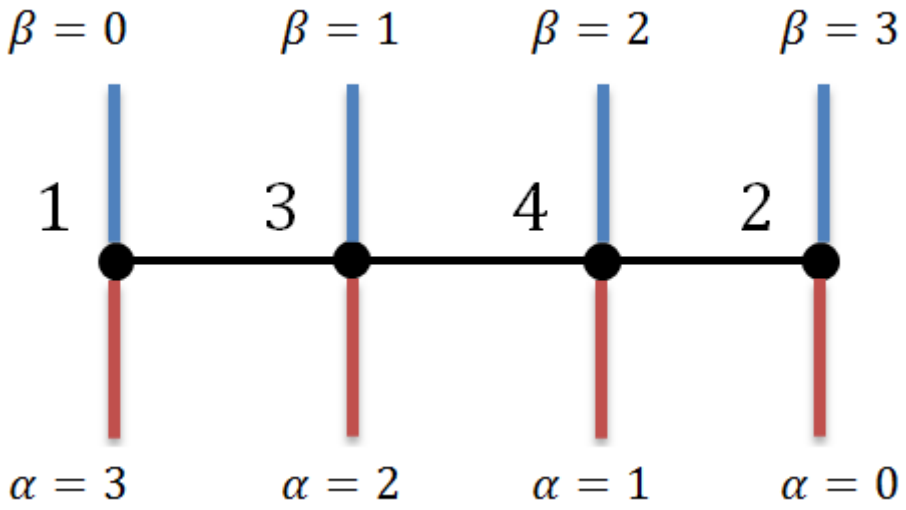
نکته‌ای که وجود دارد این است که حاصل جمع این چند جمله‌ای‌ها برابر با ۱ خواهد بود:

$$N_1(x) + N_2(x) + N_3(x) = 1$$

به همین ترتیب می‌توان برای المان‌های چهارگره‌ای، پـنج‌گـره‌ای و... نیز، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را به دست آورد.

* روش مختصات طول

یک المان یک بُعدی چهارگره‌ای را در نظر بگیرید:



تابع شکل برای هر کدام از گره‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{N_j = N_\alpha(L_1)N_\beta(L_2)}$$

مثلاً برای گره ۱ داریم:

$$N_1 = N_3(L_1)N_0(L_2)$$

و برای گره ۲ داریم:

$$N_2 = N_0(L_1)N_3(L_2)$$

و برای گره ۳ داریم:

$$N_3 = N_2(L_1)N_1(L_2)$$

و برای گره ۴ داریم:

$$N_4 = N_1(L_1)N_2(L_2)$$

$N_\alpha(L_1)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_\alpha(L_1) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\alpha} \left(\frac{nL_1 - i + 1}{i}\right) & \alpha \geq 1 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$$

$N_\beta(L_2)$ نیز دارای رابطه‌ای مشابه است.

با به دست آوردن این مقادیر و جایگذاری آن‌ها در فرمول

$$\boxed{N_j = N_\alpha(L_1) N_\beta(L_2)}$$

می‌توان تابع شکل مربوط به هر گره را به دست آورد.

****

*** روش آیرون**

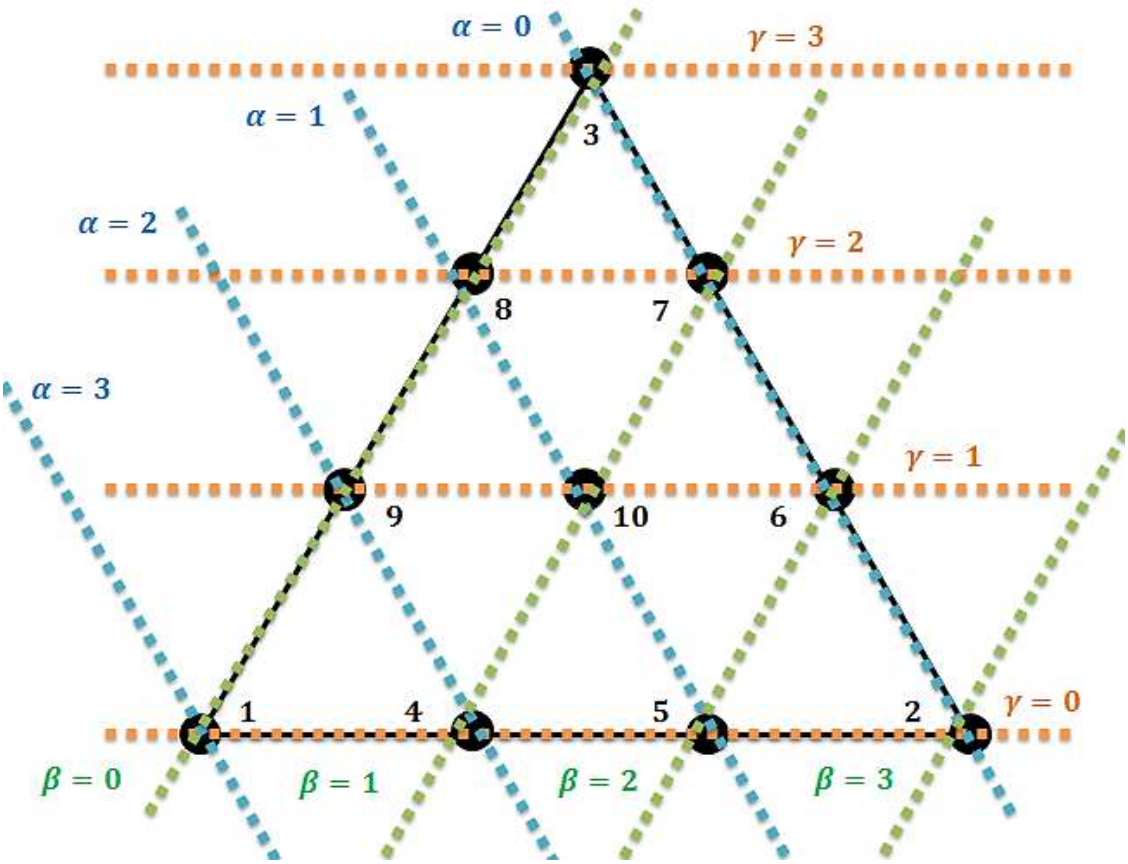
در این قسمت می‌خواهیم تابع شکل المان دو بعدی مثلثی را برای هر کدام از گره‌ها (مثلاً گره j) به دست آوریم؛ تابع شکل برای گره j چنین به دست می‌آید:

$$\boxed{N_j = N_\alpha(L_1) N_\beta(L_2) N_\gamma(L_3)}$$

$N_\alpha(L_1)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_\alpha(L_1) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\alpha} \left(\frac{nL_1 - i + 1}{i}\right) & \alpha \geq 1 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$$

$N_\beta(L_2)$ و $N_\gamma(L_3)$ نیز دارای روابط مشابه است.



با به دست آوردن این مقادیر و جایگذاری آن‌ها در فرمول

$$\boxed{N_j = N_\alpha(L_1)N_\beta(L_2)N_\gamma(L_3)}$$

می‌توان تابع شکل مربوط به هر گره را به دست آورد؛ مثلاً برای گره شماره ۱ ، تابع شکل چنین به دست می‌آید:

$$N_1 = N'_{\alpha\beta\gamma} = N'_{300} = N_3(L_1)N_0(L_2)N_0(L_3)$$

طبق فرمول، برای $N_\alpha(L_1)$ اگر پانویس α برابر صفر باشد، مقدار $N_\alpha(L_1)$ برابر ۱ خواهد بود؛ بنابراین:

$$N_0(L_2)N_0(L_3) = 1$$

و $N_3(L_1)$ از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

(مرتبه $n = 3$ است)

$$N_3(L_1) = \prod_{j=1}^{3}\left(\frac{nL_1 - i + 1}{i}\right)$$

$$= \frac{3L_1 - 1 + 1}{1} . \frac{3L_1 - 2 + 1}{2} . \frac{3L_1 - 3 + 1}{3}$$

$$= (3L_1).\left(\frac{3L_1 - 1}{2}\right).\left(\frac{3L_1 - 2}{3}\right)$$

$$= \frac{L_1}{2}(3L_1 - 1).(3L_1 - 2)$$

برای بقیه‌ی گره‌ها نیز، می‌توان تابع شکل را به همین ترتیب به دست آورد.

مباحث جلسه آخر اجزاء محدود در این جزوه

نوشته نشده است.

امام زین العابدین علیه السّلام فرمودند:

لَوْ يَعْلَمُ النّاسُ مَا فِي طَلَبِ الْعِلْمِ لَطَلَبُوهُ وَ لَوْ بِسَفْكِ الْمُهَجِ وَ خَوْضِ اللُّجَجِ

اگر مردم بدانند در طلب علم چه فایده‌ایست آن را می‌طلبند اگر چه با خون دل و فرو رفتن در گردابها باشد.

اصول کافی جلد ۱ صفحه ۴۳ روایت ۵